ゲームと現代集合論

Eureka GAP

2017 年 5 月 19 日

1　ゲーム

まず最初に次のようなクイズを考えてみましょう．

Question 1.1. チェスにおいて先手または後手に必勝法はあるか？ ただし，千日手や引き分けになることを避けるため，同じ盤面が現れてしまうことは禁止するなどして，必ず有限回のターンで勝敗が決まるものとする．

実はこのクイズのポイントはチェスが「有限」ゲームであること，すなわち，必ず有限回のターンでチェスが終わるということにあります．具体的に必勝法を構成するのは難しそうです．そこで背理法を用いることにして，先手にも後手にも必勝法は無いと仮定してみましょう．初手に先手はこう考えることでしょう：

「必勝法がないので，どのように初手を打っても自分が必勝になるような盤面にはできない．しかし，相手にも必勝法は存在しないのだから，相手が必勝にならないような盤面にはできる．そのような手を指そう．」

次の後手も全く同様に，相手が勝たないように手を指すことができます．つまり，お互いに相手を勝たせまいとプレイするわけです．すると，このゲームは決着がつかないまま無限に続いてしまうことになりますが，これは有限回のターンでゲームが終了することに矛盾します．ゆえに，次のような解答を得ます．

Answer 1.2. チェスにおいて先手または後手には必勝法が存在する．

このような議論はチェス以外のゲームでもすることができます．今回扱いたいゲームは

不確定要素がなくすべての情報が全プレイヤーに公開されているような 2 人で行うゲーム

です．このようなゲームを**完全情報 2 人ゲーム**とよびます．つまり，上で示したことは「有限」完全情報 2 人ゲームではどちらかのプレイヤーに必勝法が存在するということです．ここで次の自然な問いが生じます．

Question 1.3. 「無限」完全情報 2 人ゲームではどちらかのプレイヤーに必勝法はあるか？

この問題は一見考えることに意味があるのかどうかすら分かりません．しかし，今回話そうと思うのはこの問題がいかに重要であり集合論に大きな発展をもたらしたかということなのです．そこで次に無限ゲームの数学的な扱いを考えましょう．今回，ゲームと言えば完全に数学的に定められる $G(A;T)$ というゲームを指すことにします．$G(A;T)$ を定義するため木という概念を導入します．

Definition 1.4. 集合 T が木（**tree**）であるとは，T がある集合 X の元の有限列からなる集合で，

$$\forall p \in T \forall q (q \sqsubseteq p \to q \in T)$$

を満たすことである．ここで，列 p, q に対して，p が q の始片であることを $p \sqsubseteq q$ と書いている．また，真の拡大が存在しない T の元を terminal node といい，その真の始片がみな T の元であるような X の無限列と terminal node 全体の集合を $\lceil T \rceil$ と書く．一般に，$\lceil T \rceil$ の元は T の枝（**branch**）と呼ばれる．

ゲーム $G(A;T)$ は，木 T と集合 $A \subseteq \lceil T \rceil$ に対して定義されます．ここで，T は集合 X の有限列であるとします．X の元を **move**，T の元を **position**，そして $\lceil T \rceil$ の元を **play** と呼ぶことにします．ゲーム $G(A;T)$ のプレイヤーは I，II とよばれ，それぞれ先手と後手に分かれます．I と II は交互に move $a_n \in X$ を選ぶことでプレイします．

$$\begin{array}{llllllll} \mathrm{I}: & a_0 & & & a_2 & & & \ldots \\ & & \searrow & & \nearrow & \searrow & & \nearrow \\ \mathrm{II}: & & & a_1 & & & a_3 & \end{array}$$

T はゲームのルールを定めています．つまり，両プレイヤーは任意の n について $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in T$ となるようにプレイしなければならず，どちらかのプレイヤーがプレイできなくなるまでゲームを続けます．ゲームは有限回で終了することもあれば，無限に続くかもしれません．いずれにせよ，これらのプレイによって play $x = (a_0, a_1, \ldots) \in \lceil T \rceil$ を得ることになります．ゲームの勝敗は play によってのみ決まり，$x \in A$ のとき I の勝利，$x \notin A$ のとき II の勝利となります．A は **payoff set** とよばれます．

適切に T と A を選ぶことで，前節で述べた完全情報 2 人ゲームが $G(A;T)$ の形に定式化できることは納得できることでしょう．ここで述べた用語の定義とチェスとの対応をまとめておきます．

表 1　$G(A;T)$ における用語

用語	定義	チェスとの対応
move	X の元	コマの動作
position	T の元	（可能な）盤面
play	$\lceil T \rceil$ の元	最終盤面
payoff set	A	先手の勝利盤面

偶数の長さの position $p \in T$ に対して，p においてプレイ可能な move $\sigma(p) \in X$ を返すような関数 σ を I の戦略（**strategy**）と呼びます．I が戦略 σ に従ってプレイするとは，以下のようにプレイすることです．

$$\begin{array}{llllllll} \mathrm{I}: & a_0 = \sigma(\emptyset) & & & a_2 = \sigma((a_0, a_1)) & & & \ldots \\ & & \searrow & & \nearrow & \searrow & & \nearrow \\ \mathrm{II}: & & & a_1 & & & a_3 & \end{array}$$

そして，I の戦略 σ が（I の）必勝戦略（**winning strategy**）であるとは，II がどのようにプレイしたとしても，I が戦略 σ に従ってプレイすると，I が勝利することとします．また，奇数の長さの position $q \in T$ に対して，q においてプレイ可能な move $\tau(q) \in X$ を返すような関数 τ を II の戦略とよび，τ が II の必勝戦略であるということも上と同様に定義されます．単なる言い換えですが，次の用語がこの節で最も重要です．

Definition 1.5. ゲーム $G(A;T)$ において，プレイヤー I と II のどちらかに必勝戦略が存在する場合，$G(A;T)$ は**決定的 (determined)** という．T が文脈から明らかな場合，単に A は**決定的**であるともいう．

以上の用語を使うことで，前節で示した **Answer 1.2** は次のように述べられます．

Theorem 1.6. ゲーム $G(A;T)$ において無限の長さの play が存在しないならば，$G(A;T)$ は決定的である．

さて，一般的なゲームの定義を述べてきましたが，実は今回の話で扱いたい T は ${}^{<\omega}\omega$ と ${}^{<\omega}2$ の 2 つしかありません[*1]．このとき，それぞれ $[T]$ は ${}^{\omega}\omega$ と ${}^{\omega}2$ となることに注意しましょう．後でまた述べますが，T としてこの 2 つのどちらを考えても理論の展開に差異はないので，その時々で都合のよい方を使うことにします．基本的には $T = {}^{<\omega}\omega$ を考えます[*2]．すると，前節の **Question 1.3** は次のように定式化されます．

Question 1.7. 全ての $A \subseteq {}^{\omega}\omega$（または ${}^{\omega}2$）は決定的か?

しかし，実はこの問題の答えは NO だということが簡単に示されます．

Proposition 1.8. 決定的でない A が存在する．

ただし，その証明には（後に説明する）選択公理という原理を使うことで，決定的でない A の存在を非構成的に示します．つまり，具体的な証拠が得られるような証明はされません．よって，次のような問題が生じます．

Question 1.9. どのような A が決定的なのか?

これ以上話を続けるためには集合論の基本的な知識が必要となります．次の章ではゲームの話からいったん離れて集合論について述べることにします．

2　集合論

この章では今回の話において必要な集合論の知識を簡単な集合論の歴史とともに述べようと思います．無限集合それ自体が考察に値するものであることは，1870 年代，Cantor によって指摘されました．彼は集合論の創始者であり，様々な定理を証明していますが，最も有名なのは次の定理でしょう：

Theorem 2.1. $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

ここで集合 A に対して $|A|$ は A の濃度を意味し，上の定理は $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$ の間に全単射が存在しないことを表しています．端的に言えば，自然数の「個数」よりも実数の「個数」のほうが真に「大きい」ということです．こういった意味で，Cantor は無限にも異なる「大きさ」があることを発見したのです．Cantor は続けて，次のような予想をしました．

Conjecture 2.2. $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$ となる集合 A は存在しない．

この予想のことを**連続体仮説（Continuum Hypothesis，CH）**と言います．Cantor はこの予想が肯定

[*1] ここで，ω とは（0 を含む）自然数全体の集合，2 とは $\{0,1\}$ という二元集合を表すことにします．さらに，集合 X の元からなる有限列全体の集合を ${}^{<\omega}X$，無限列（より正確には長さ ω の列）全体の集合を ${}^{\omega}X$ で表すことにします．

[*2] さらに，一般的な T に対してもほとんど同様な議論をすることができるので，T を ${}^{<\omega}\omega$ に限定して考えることはほとんど本質を損なっていません．

的に証明されると信じていましたが，結局彼の生きている間は未解決のままでした．時は流れて 1920 年代，数学において用いられている仮定を明確にするという要請のもとで集合論における公理系である ZF，ZFC が誕生しました．ZF は主に色々な集合（空集合 $\emptyset$，対集合 $\{x, y\}$，和集合，べき集合，etc.）の存在を保証する公理から構成されていて，ZFC は ZF に次に述べる選択公理（Axiom of Choice, AC）という公理を加えたものを言います．

- 選択公理: 任意の非空集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，関数 $f\colon \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ が存在して，$\forall\lambda\in\Lambda f(\lambda)\in X_\lambda$ が成り立つ．

ここで存在が保証されるような f は選択関数と呼ばれ，各 X_λ から一つずつ元を取り出す役割をしています．実は，あらゆる数学は集合論の言葉で記述することができて，数学の定理と言えば ZF，ZFC という仮定から論理的に導かれた命題を指すのが一般的です．今の数学では選択公理も仮定するのが普通なので，ZFC こそが数学の公理系であると言って間違いではないでしょう．問題はこの公理系が妥当なものなのか，特に無矛盾かどうかということですが，同年代に証明された論理学の大定理として次があります．

Theorem 2.3 (Gödel の不完全性定理)**.** 一定の条件を満たした十分な強さをもつ無矛盾な公理系（例えば ZF や ZFC）において，証明も反証もできない命題，すなわち独立命題が存在する．特に，その公理系自身の無矛盾性を示すことはできない．

これによれば，ZFC が無矛盾である限り，我々が ZFC の無矛盾性を確かめることはできないことが分かります．ただし，現代では ZFC の無矛盾性はほぼ確からしいと思われていますし，その無矛盾性をいちいち断るのも面倒なので次のような取り決めをしておきましょう．

Remark 2.4. 以降，ZF や ZFC が無矛盾という仮定は省略する．

では ZF や ZFC 上の独立命題の例を挙げましょう．次が歴史上初めて証明された独立命題の一つです．

Theorem 2.5. ZFC 上連続体仮説は独立である．

これは Cantor の予想を完全に解決するものです．ちなみに，このとき同時に ZF 上選択公理が独立になることも示されています．この独立性は二人のロジシャンによって解決されたもので，1940 年，ZF+AC と ZFC+CH の無矛盾性が Gödel により L というモデル[*3] を用いて示され，1962 年，ZF+¬AC と ZFC+¬CH の無矛盾性が Cohen により**強制法（forcing）**とよばれるテクニックを用いて示されました[*4]．どちらの証明も集合論において非常に重要なものなのですが，特に強制法というツールの強力さはここで説明しきれないほどです．微妙に話が脱線してきてしまいました．再び話は Cantor の時代に戻ります．Cantor は連続体仮説を解決する試みのなかで，連続体仮説の反例となるような $X \subseteq R$ を見つけられるかどうか考えました．そこで得られたのが次の定理です．

Theorem 2.6 (Cantor-Bendixon)**.** 任意の空でない閉集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ に対して，完全集合（perfect set），すな

[*3] モデルとはその内部で集合論の公理系を満たしているような集合またはクラスのことを言います．L は ZFC+CH のモデルとなっており，このことから ZFC+CH の無矛盾性を帰結することができます．

[*4] ここで用いるような強制法については [1] や [2] といった公理的集合論の入門書で詳しく述べられています．また，[3] では集合論を知らない人向けに強制法がどのようなテクニックなのかという説明を試みています．

わち孤立点をもたない閉集合 P と，高々可算な集合 S が存在して，

$$X = P \cup S, P \cap S = \emptyset$$

となる．さらに，このような P と S は一意である．

また，全ての空でない完全集合は連続体濃度，すなわち $\mathbb{R}$ と同じ濃度をもつことが簡単に示せるので次の系を得ます．

Corollary 2.7. 全ての非可算閉集合は連続体濃度をもつ．

これは $\mathbb{R}$ の部分閉集合は連続体仮説の反例になりえないことを意味しています．Cantor-Bendixon の定理で示した性質を抽出して次のように定義しておきましょう．

Definition 2.8. X を位相空間とする．$A \subseteq X$ が **perfect subset property** をもつとは，A が高々可算，または空でない（X の）完全部分集合を含むことである．

この性質が閉集合以外の集合に対しても成り立つかというのは自然な疑問です．実際，もっと広い集合のクラスに対して perfect subset property が成り立つことが示せるので，すべての $\mathbb{R}$ の部分集合に対しても成り立つと予想したいところです．しかし，選択公理を使えば perfect subset property をもたない $\mathbb{R}$ の部分集合の存在はすぐに示すことができます．ただ，その証明には選択公理を使っているので，具体的に perfect subset property をもたないような反例を構成できたわけではないというのがポイントです．そこで，少々唐突にも見えますが，「具体的に定義，構成できるような部分集合はみな perfect subset property をもつ」と予想しましょう．全く同様の議論が例えば Lebesgue 可測性に対しても行われます．分かりやすさのため，繰り返しを恐れずにもう一度説明すると，Lebesgue 可測という性質は「長さや面積，体積を測ることができる」という性質なので，すべての実数の集合に対して期待したい性質です．しかし，選択公理を使うと Lebesgue 非可測集合の存在が示されてしまいます．一方で，選択公理抜きで構成される集合はみな Lebesgue 可測になっているという経験則もあることでしょう．そこで先と同じように「具体的に定義，構成できるような部分集合はみな Lebesgue 可測である」と予想しましょう．これはそれほど唐突な予想だとは思わないのではないでしょうか．

上で挙げた perfect subset property や Lebesgue 可測性などといった集合論的に良い性質を（非公式に）正則性と呼びます．これらは選択公理のもとではすべての部分集合に対しては成り立つとは限りませんが，次のような予想をすることが可能です．

Conjecture 2.9. 具体的に定義，構成できるような $\mathbb{R}$ の部分集合はすべて正則性をもつ．

このように $\mathbb{R}$ の定義可能な部分集合について調べるのが**記述集合論（descriptive set theory）**という分野です．記述集合論は $\mathbb{R}$ だけでなく**ポーランド空間（Polish space）**，すなわち完全可分完備距離空間に対しても展開されるのが普通です．そこで，すべてのポーランド空間において，次のような「定義可能な」部分集合のクラスを定義することにします．

Definition 2.10. X をポーランド空間とする．$\mathbb{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ はすべての開集合を含み補集合，可算和をとる操作で閉じている最小の集合族を指す．$\mathbb{B}$ の元を **Borel 集合**とよぶ．

$B \subseteq X \times \mathbb{R}$ に対して，その射影 $pB \subseteq \mathcal{P}(X)$ を

$$pB = \{x \in X \mid \exists y \in \mathbb{R}(x, y) \in B\}$$

と定める．集合族 $\mathbf{\Sigma}^1_1 \subseteq \mathcal{P}(X)$ を

$$A \in \mathbf{\Sigma}^1_1 \iff \text{閉集合 } B \subseteq X \times \mathbb{R} \text{ が存在して } A = pB$$

によって定める[*5]．この集合族の元を**解析集合（analytic set）**という．また，各 $n \geq 1$ に対して集合族 $\mathbf{\Sigma}^1_n, \mathbf{\Pi}^1_n \subseteq \mathcal{P}(X)$ を帰納的に

$$\begin{aligned} A \in \mathbf{\Pi}^1_n &\iff X \setminus A \in \mathbf{\Sigma}^1_n, \\ A \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1} &\iff \mathbf{\Pi}^1_n \text{集合 } B \subseteq X \times \mathbb{R} \text{ が存在して } A = pB \end{aligned}$$

と定め，さらに $\mathbf{\Delta}^1_n = \mathbf{\Sigma}^1_n \cap \mathbf{\Pi}^1_n$ と定める．$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{\Sigma}^1_n$ に属する集合を**射影集合（projective set）**と呼ぶ.

Fact 2.11 (Suslin，Luzin)**.** 次の図のような包含関係が成り立つ.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & \mathbf{\Sigma}^1_1 \arrow[dr, hook] & & \mathbf{\Sigma}^1_2 \arrow[dr, hook] & & \cdots \\
\mathbb{B} = \mathbf{\Delta}^1_1 \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathbf{\Delta}^1_2 \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathbf{\Delta}^1_3 \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & \\
 & \mathbf{\Pi}^1_1 \arrow[ur, hook] & & \mathbf{\Pi}^1_2 \arrow[ur, hook] & & \cdots
\end{tikzcd}$$

この階層を**射影階層（projective hierarchy）**と呼ぶ.

我々は今後，この射影集合のクラスに注目することにします．つまり，先ほどの予想は次のように定式化されます.

Conjecture 2.12. すべての射影集合は perfect subset property，Lebesgue 可測性といった正則性をもつ.

実際，射影階層の下のほうに属する集合に対しては正則性を示すことが可能です.

Proposition 2.13. すべての $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合，すなわち解析集合は perfect subset property をもち，Lebesgue 可測である.

以上が集合論についての基本的な知識の説明なのですが，最後に決定性がどのように集合論，特に記述集合論と関わってくるのかを述べてこの章を終えましょう．先ほど，記述集合論ではポーランド空間が研究対象だと述べました．ポーランド空間の例としては $\mathbb{R}$ の他に ${}^{\omega}\omega, {}^{\omega}2, L^p(\mathbb{R})$ などがあげられます．特に ${}^{\omega}\omega$ や ${}^{\omega}2$ という空間は，実は記述集合論において $\mathbb{R}$ と同一視できます．というのも，これらの空間の間には Borel 同型射とよばれる射が存在し，この射で引き戻しても集合の複雑性や正則性は保たれるからです．むしろ，集合論においては実数と言えば $\mathbb{R}$ というよりは ${}^{\omega}\omega$ や ${}^{\omega}2$ の元を指すのが普通です．ここで ${}^{\omega}\omega$ や ${}^{\omega}2$ という空間が，1 章で扱いたいと言っていた $T = {}^{<\omega}\omega, {}^{<\omega}2$ の play の集合 $\lceil T \rceil$ と一致していることに注意しましょう．すると実は決定性という性質は実数の集合に対する性質なのだということに気づくのです！ こうしてゲームと集合論が決定性の名のもとに合流しました.

3　決定性と正則性

この章では決定性と正則性の間の関係を調べます．前章の最後の議論を受け，$\lceil T \rceil$ を空間とみなすために次の自然な位相を入れます.

[*5] ここで B は閉集合としましたが，Borel 集合としてもよく，どちらの場合でも定義されるクラスは同じです.

Definition 3.1. T を木とする．$p \in T$ に対して，$T_p = \{q \in T : p \sqsubseteq q\}$ と定めると，これは木である．$\lceil T \rceil$ には $\lceil T_p \rceil$ $(p \in T)$ たちを開基とした位相を入れる．

$T = {}^{<\omega}\omega, {}^{<\omega}2$ として $\lceil T \rceil$ に上の位相を入れたものは ${}^{\omega}\omega, {}^{\omega}2$ に積位相を入れたものと一致します．
複雑さの低い集合に対しては，正則性が成り立つだけでなく決定性も成り立っています．

Theorem 3.2. 開集合 $A \subseteq {}^{\omega}\omega$ は決定的である．

Proof. 有限ゲームと同じような考え方で証明できる．$G(A; {}^{<\omega}\omega)$ において I が必勝法を持たないとすると，II は I が必勝とならないようにプレイできる．このようにプレイしたとき II はゲームに勝利することを示す．このときの play を x として，$x \in A$ と仮定する．A は開集合なので，ある $p \sqsubseteq x$ について $x \in \lceil T_p \rceil \subseteq A$ だが，このとき position p において I は必勝となっている．しかし，II は途中で I が必勝とならないようにプレイしていたはずなので矛盾．よって $x \notin A$ であるから，II の勝利である． □

Corollary 3.3. 閉集合 $A \subseteq {}^{\omega}\omega$ は決定的である．

Proof. 先の証明における先手と後手の役割を入れ替えればよい．$T = {}^{<\omega}\omega$ とおく．また，$T' = T_{(0)}, A' = \{\langle 0 \rangle {}^\frown x \mid x \notin A\}$ とおく．ここで $^\frown$ は列の連結を表す．$A' \subseteq \lceil T' \rceil$ は開集合なので，$G(A'; T')$ における I(または II) の必勝法は $G(A; T)$ における I(または II) の必勝法を導くので，$G(A; T)$ も決定される． □

この系の証明とまったく同様に，例えば $\mathbf{\Sigma}^1_n$ 集合の決定性から $\mathbf{\Pi}^1_n$ の決定性を導くことができます．実はもっと強く次が成り立ちますが，その証明は開集合の場合と比べてはるかに難しくなります．

Theorem 3.4 (Martin)**.** すべての Borel 集合は決定的である．

選択公理が非決定的な部分集合の存在を導くことは 1 章において既にコメントしていましたが，今述べているのは射影階層の下の方の集合に対しては決定性が成り立つということです．このような観察において，決定性と正則性には類似があると気づきます．ここに決定性が何故重要なのかという問いに対する一つの答えがあります．実は決定性は正則性の一つであり，しかも他の正則性とは一線を画する「最強の」正則性，つまり他の正則性を導いてしまうほど「良い」性質だと言えるのです．その一例として，以下では次の定理を証明してみることにしましょう．

Theorem 3.5. $\mathbf{\Sigma}^1_n$ 集合がすべて決定的ならば，$\mathbf{\Sigma}^1_n$ 集合はすべて Lebesgue 可測である．

実はもう一工夫することで $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ 集合の可測性まで言えます．また，perfect subset property も決定性から示すことができますが，今回はそれらの証明は紙面の都合上省くことにします．しかし，それでも定理の証明を追うことで決定性がいかに強力な仮定なのかは十分理解できるはずです．

今後，木としては $T = {}^{<\omega}2$ を考えます[*6]．始めに $\lceil T \rceil = {}^{\omega}2$ 上に Lebesgue 測度 μ を定義しましょう．まず，開基 $\lceil T_p \rceil$ に対しては，p の長さ $\mathrm{lh}(p)$ を使って $\mu(\lceil T_p \rceil) = 2^{-\mathrm{lh}(p)}$ と定義します．次に，開集合に対しては開基の非交和による表示 $A = \bigsqcup_{p \in J} \lceil T_p \rceil$ が与えられたとき，$\mu(A) = \sum_{p \in J} \mu(\lceil T_p \rceil)$ と定義します．一般の $B \subseteq {}^{\omega}2$ に対しては，Lebesgue 外測度 μ^* を $\mu^*(B) = \inf\{\mu(A) \mid B \subseteq A \wedge A : \text{開集合}\}$ で定め，B が null であるとは，$\mu^*(B) = 0$ であることとします．さらに，$A \subseteq {}^{\omega}2$ が Lebesgue 可測であるとは，ある Borel 集合 $B \supseteq A$ が存在して $B \setminus A$ が null であることと定め，Lebesgue 可測な A に対してはその Lebesgue 測度を

[*6] もちろん，この結果は ${}^{\omega}\omega$ や $\mathbb{R}$ にも適用できます．

$\mu(A) = \mu^*(A)$ と定義します．定義からすべての Borel 集合は Lebesgue 可測であることに注意しましょう．

定理の証明には Harrington's covering game $G(A, \varepsilon)$ というゲームを用います．ここで，$A \subseteq {}^{\omega}2, 0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ です．ルールを説明します．$G(A, \varepsilon)$ は木 ${}^{<\omega}\omega$ 上のゲームです．I は $n_i \in \{0, 1\}$ をプレイしなければなりません．II は $t_i \in \omega$ をプレイしますが，各 t_i はある開基の有限和 G_i のコードになっています[*7]．このとき，G_i は

$$\mu(G_i) \leq \frac{\varepsilon}{2^{2(i+1)}}$$

を満たさなければなりません．これらの条件を満たさないようなプレイをした場合，その時点でそのプレイヤーの敗北が決定することにします．今，この条件から外れることなくプレイが無限に続いたとします．その結果

$$(n_0, n_1, \ldots) \in A \setminus \bigcup_{i \in \omega} G_i$$

となった場合 I の勝利，そうでない場合 II の勝利となります．つまり，I は A の元を一つ選び，II は十分に小さな G_i たちで I の選ぶ A の元を被覆しようとします．I の選んだ元が II の play によって被覆されなければ I の勝ち，被覆されれば II の勝ちとなるというわけです．注意すべきは，A が $\mathbf{\Sigma}^1_n$ 集合のとき $G(A, \varepsilon)$ の payoff set もまた $\mathbf{\Sigma}^1_n$ となることです．ここで次の補題が重要です．

Lemma 3.6. $A \subseteq {}^{\omega}2$ として，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $G(A, \varepsilon)$ が決定されると仮定する．このとき，任意の Lebesgue 可測な $X \subseteq A$ が $\mu(X) = 0$ であるならば，$\mu(A) = 0$ である．

この補題からは次のようにただちに定理が従います．

proof of Theorem. $A \subseteq {}^{\omega}2$ は $\mathbf{\Sigma}^1_n$ であるとする．Lebesgue 可測な $\tilde{A} \supseteq A$ で，$\mu(\tilde{A})$ が極小になるようなものをとる．可測性の定義より $\tilde{A}$ は Borel 集合にとれる．$B = \tilde{A} \setminus A$ とおく．B は $\mathbf{\Pi}^1_n$ であり，任意の Lebesgue 可測な $X \subseteq B$ は $\mu(X)$=0 である．決定性の仮定より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $G(B, \varepsilon)$ は決定されるので，補題より $\mu(B) = 0$ であり，A は Lebesgue 可測である． □

では補題を示して定理の証明を完成させましょう．

proof of Lemma. covering game $G(A, \varepsilon)$ において I に必勝戦略がないことを示し，決定性の仮定より存在する II の必勝戦略を用いて A の測度 ε の被覆を構成する．ε は任意なので $\mu(A) = 0$ となる．

$\varepsilon > 0$ を一つ任意に取って固定する．まず，$G(A, \varepsilon)$ において I に必勝戦略 σ があるとして矛盾を導く．I が σ に従ったときにプレイされうる $(n_0, n_1, \ldots)$ 全体の集合を D とする．このとき $D \in \mathbf{\Sigma}^1_1$ である．これは，必勝法 σ を介して II のプレイに I のプレイを対応させるような関数 $f : {}^{\omega}\omega \to {}^{\omega}\omega$ が連続であり，$\mathbf{\Sigma}^1_1$ であることと ${}^{\omega}\omega$ の連続像であることが同値という事実を用いると分かる．$\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合は Lebesgue 可測だったから，$D \subseteq A$ より $\mu(D) = 0$ である．I_n $(n \in \omega)$ を開基の元で，$D \subseteq \bigcup_{n \in \omega} I_n$ かつ $\mu(\bigcup_{n \in \omega} I_n) \leq 2\varepsilon/3$ なるものとする．$2/3 = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-2(i+1)}$ であることから，I_n たちを十分細かく分割して番号を付け直すことで，狭義単調増加数列 $(l_i : i \in \omega)$ が存在して，$l_0 = 0$ かつすべての $i \in \omega$ に対して

$$\mu\left(\bigcup_{k=l_i}^{l_{i+1}-1} I_k\right) \leq \frac{\varepsilon}{2^{2(i+1)}}$$

[*7] n 番目の素数を p_n としたとき $p_1^{p_1^{i_{1,1}} \cdots p_{k_1}^{i_{1,k_1}}} \cdots p_n^{p_1^{i_{n,1}} \cdots p_{k_n}^{i_{n,k_1}}}$ は $\bigcup_{1 \leq m \leq n} \lceil T_{(i_{m,1}-1, \cdots, i_{m,k_m}-1)} \rceil$ をコードするなどと定めればよいですが，コードの方法自体はあまり本質的ではありません．

とできる．そこで，II は t_i として $\bigcup_{k=l_i}^{i_{i+1}-1} I_k$ のコードをプレイすることで I に必ず勝利する．このことは I に必勝戦略が存在したという仮定に矛盾する．ゆえに I は必勝戦略を持たない．

そこで，決定性の仮定より $G(A,\varepsilon)$ において II に必勝法が存在する．II が必勝法に従っているときにプレイされうる t_i たちがコードしている集合 G_i 全ての和集合を G とおく．II は必勝法に従っているので $A \subseteq G$ である．G は開集合であり，その測度は

$$\mu(G) \leq \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i+1} \cdot \frac{\varepsilon}{2^{2(i+1)}} = \varepsilon$$

である．$\varepsilon > 0$ は任意だったから，$\mu(A) = 0$ が示された． □

このように，決定性の使い方としては，状況に応じたゲームを用意して，決定性によって存在が保障された必勝戦略から欲しかったオブジェクトを構成するという手法がしばしば用いられます．つまり，選択公理と同様に決定性もある種の構成原理だとみなすことができるのです．

4 巨大基数

正則性と決定性の関わりについては前章で分かりました．しかし，まだ解決していない問題があります．そもそも射影集合が正則性や決定性をもつという予想が正しいかどうかについては一切述べていませんでした．結果から言ってしまうと，実はこの予想は ZFC において示すことも反証することもできないのですが，連続体仮説の場合と異なる事情があります．そもそも，集合論において ZF や ZFC 上で独立であろう命題について考えるとき，次のような 2 つの視点があります．

(1) その命題は ZF や ZFC に加えても無矛盾か?
(2) その命題は「良い」仮定から導けるか?

まず一点目についてですが，例えば，ZFC 上連続体仮説（CH）が独立であるという主張はより正確にいえば次の命題が（ZFC 上）証明できることだということです：

$$\mathrm{Cons(ZFC)} \iff \mathrm{Cons(ZFC{+}CH)} \iff \mathrm{Cons(ZFC{+}\neg CH)}.$$

ここで，$\mathrm{Cons}(T)$ は公理系 T は無矛盾であるという意味です．このとき ZFC と ZFC+CH，ZFC+¬CH は無矛盾等価であるといいます．ZFC の無矛盾性を信じている我々にとっては，ZFC と無矛盾等価であることが示せた公理系もまた無矛盾であると思うことができますが，問題なのは，あらゆる命題に対して，それを ZF(C) に加えた公理系が ZF(C) と無矛盾等価であるとは限らないということです．実際，射影集合の正則性を加えた公理系は ZFC と無矛盾等価とは言えません．よって，無矛盾性についての議論を進めようと思ったとき，無矛盾性を測るための基準に当たる公理系が ZFC の他に必要なことが分かります．

二点目に移りましょう．実は正則性や決定性をもたない射影集合の存在は他の集合論的命題から導くことが可能です．

Theorem 4.1. $V = L$ を仮定すると，perfect subset property をもたない $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合，Lebesgue 可測でない $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合，決定的でない $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合の存在が示される．

ここで出てきた $V = L$ という命題は，集合全体のクラス V と（2 章で名前だけ登場した）L が一致しているということを意味しており，ZFC+$V = L$ も ZFC+$V \neq L$ も ZFC と無矛盾等価です．このことから ZFC+

「正則性をもたない射影集合が存在する」という公理系が ZFC と無矛盾等価だということが導かれ，ZFC において **Proposition 2.13** や **Theorem 3.5** がそれ以上拡張できないことも分かります．ではすべての射影集合が正則性をもつという予想は否定されるべきものなのかと言うとそうではありません．実は集合論的見解において $V = L$ という命題は自然な仮定，良い仮定とは言い難いのです．ならば集合論において ZFC をこえる良い仮定とは何なのでしょうか？

そこで無矛盾性を測るための基準，ZFC をこえる良い仮定にあたるものとして導入されるのが巨大基数公理とよばれる公理群です．これらの公理群はある意味で「巨大な」集合である巨大基数の存在を保証するような公理たちなのですが，主張を述べてもその意味を理解することは難しいので，正確な定義をここで与えるようなことはしません．巨大基数公理は矛盾を生じさせない集合論的に妥当な公理であると一旦ここでは認めることにして，巨大基数公理の使い方を紹介します．

表 2　巨大基数の例.

0=1
$\Downarrow$
I0∼I2
$\Downarrow$
huge
$\Downarrow$
supercompact
$\Downarrow$
Woodin
$\Downarrow$
可測
$\Downarrow$
到達不能

巨大基数公理の重要なポイントの一つは，（今までに知られている）ほぼすべての巨大基数公理が無矛盾性の強さにおいてほぼ一直線に並んでいる，すなわち巨大基数公理 A と B があった場合，

$$\mathrm{Cons}(\mathrm{ZFC{+}A}) \Rightarrow \mathrm{Cons}(\mathrm{ZFC{+}B}) \text{ もしくは } \mathrm{Cons}(\mathrm{ZFC{+}B}) \Rightarrow \mathrm{Cons}(\mathrm{ZFC{+}A})$$

が成り立っていることです[*8]．このことは巨大基数公理を無矛盾性のものさしとして用いることを可能とします．つまり，命題 ϕ を ZF(C) に加えたものの無矛盾性を知りたい場合，

$$\mathrm{Cons}(\mathrm{ZF(C)}+\phi) \Longleftrightarrow \mathrm{Cons}(\mathrm{ZFC}+\text{ 巨大基数公理})$$

となるような巨大基数公理を見つけることを目標とすればよいのです．巨大基数を用いた無矛盾等価性の例としては次の定理が最初に示されたものでしょう．

Theorem 4.2. （Solovay-Shelah）ZFC+「到達不能基数の存在」と，ZF+DC [*9]+「すべての実数の集合は perfect subset property をもち Lebesgue 可測である」という 2 つの公理系は無矛盾等価である．

さらに，巨大基数公理を仮定することで ZFC では決着がつかなかった様々な命題が導出できることが多々あります．例えば，ZFC に加えて到達不能基数の存在を仮定すれば ZFC の無矛盾性が示せることが簡単に分かります．また，次の定理も初期の巨大基数の理論の結果として有名です．

Theorem 4.3. （Scott）可測基数の存在を仮定すれば $V \neq L$ が成り立つ．

ZFC の無矛盾性や $V \neq L$ といった命題は真偽が決定できない命題というよりはむしろ ZFC では力不足だったために証明できなかった命題だと考えることができます．そこで集合論においては ZFC で証明できなかった事柄は十分大きな巨大基数の存在を認めることで証明しようと試みるわけです[*10]．これが巨大基数公理を ZFC をこえる良い仮定として用いるということです．

*8 多くの場合，巨大基数 A 自身が巨大基数 B であったりします．

*9 従属選択公理（Dependent Choice）とよばれる弱い選択公理のこと．

*10 ただし巨大基数公理がすべての命題の真偽を決定するわけではありません．例えば，連続体仮説はいくら巨大基数を仮定しても証明も反証もできません．

では果たして巨大基数公理が無矛盾で妥当な良い仮定なのかということですが，巨大基数公理の妥当性を納得するには集合論の勉強（もしかすると研究？）を進める必要があり，ここでは十分に説明することができません[*11]．ただ，集合論においてはこのような信条がひろく採用されているということを知っておくと，集合論における定理の意味を理解しやすくなると思います．

5　決定性公理

では最後に，歴史にそって正則性や決定性についての結果をまとめつつ，巨大基数も用いて決定性の問題に決着をつけましょう．1 章で述べたチェスや有限ゲームの話は 1910 年代にはすでに考察されていました．しかし，無限ゲームと実数の正則性との関連が見出されたのは 1925 年になってからで，開集合に対する決定性が証明されたのはもっと遅く 1950 年代のことでした．1962 年，当時記述集合論が活発だったポーランドで，Mycielski と Steinhaus という 2 人の数学者によって次のような公理が提案されました:

$$\text{全ての } A \subseteq {}^{\omega}\omega \text{ は決定的である．}$$

この公理は現在**決定性公理（Axiom of Determinacy, AD）**とよばれているものです．この公理は非常に強力ですが，**Proposition 1.8** から明らかに ZFC と矛盾します．しかし，注意したいのは ZF+AD が矛盾するかどうかは全く明らかではないということです．

決定性公理の重要性は 1967 年の 2 つの結果によって認識されたといってよいでしょう．1 つは Blackwell による決定性を用いた古典的記述集合論の結果の別証明，もう 1 つは Martin による次の結果です．

Theorem 5.1. ZF+AD を仮定すると，$\aleph_1$ は可測基数である．

この結果は決定性と巨大基数の関係をはじめて明らかにしたものでした．決定性公理という実数に関する仮定を使うと，実数よりもはるか高みにあるはずの巨大基数的性質が $\aleph_1$ に降りてきてしまうというところが驚くべき点です．以後決定性は注目を浴びて多くの集合論者によって研究されることとなりましたが，Martin はその後も決定性に関する研究を続けて，次の定理たちを示しています．

Theorem 5.2. ZFC において次が成り立つ．

- （1970）可測基数が存在するならば，$\mathbf{\Pi}^1_1$ 決定性が成り立つ．
- （1975）巨大基数の仮定無しに Borel 決定性が成り立つ．
- （1980）I2 を仮定すれば，$\mathbf{\Pi}^1_2$ 決定性が成り立つ．

巨大基数を仮定すると決定性を直接導出できるというこれらの結果は素晴らしいものではありましたが，当時の研究者にとってはある意味限界を感じさせる結果だったかもしれません．というのも，最後の結果に出てくる I2 という命題は巨大基数の中でも最も矛盾に近い仮定のうちの一つで，これ以上の強さの巨大基数公理はほとんど無いからです．そこで当時の集合論者たちは，射影集合の決定性や ZF+AD の無矛盾性は今まで知られているどの巨大基数公理でも把握できないのではないかと予想していました．

[*11] 巨大基数公理は，矛盾のない範囲でできるだけ大きな集合，多くの集合を認めようという集合論の思想と一致しており ZFC の妥当な拡張だという説明もできます．ただ，この説明では個人的には納得しにくいと感じます．巨大基数公理の妥当性というのは，それを認めた場合の帰結や理論がうまくいくことが状況証拠となり，段々と受け入れていくようなものだと思います．

ブレイクスルーが起こったのは 1984 年のことです．この年，Foreman，Magidor，そして Shelah の 3 人による共著論文 “Martin’s Maximum, saturated ideals and non-regular ultrafilters” が書かれました．この論文は集合論におけるマイルストーンともいうべき大論文で，内容自体は決定性に直接関係のないものなのですが，今でも使われるような斬新なアイデアが多く含まれていました．そして，この論文で使われているテクニックに刺激されて集合論の様々な分野が大発展を遂げることになります．そのうちの一つが Woodin による次の結果です．

Theorem 5.3 (Woodin, 1984)**.** supercompact 基数が存在するならば，$L(\mathbb{R})$ 内の実数の集合はすべて Lebesgue 可測である．

ここで $L(\mathbb{R})$ とはすべての射影集合をも含むようなクラスです．射影集合の正則性がすでに知られていた巨大基数の存在から導けるという結果は当時の集合論者の予想を大きく裏切るものだったことでしょう．Shelah と Woodin はこの supercompact 基数という仮定を交互に弱めていき，この過程で Woodin 基数とよばれる巨大基数が考案されました．また，同時期に Martin と Steel によって内部モデル理論とよばれる分野も発展していき，そこで用いられたテクニックを導入することで，射影集合の決定性は supercompact 基数よりもずっと小さな巨大基数から導かれることが示されました．

Theorem 5.4 (Martin-Steel，1984)**.** n 個の相異なる Woodin 基数と，それらよりも大きな可測基数が存在すると仮定する．このときすべての $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ 集合は決定的である．特に，無限個の Woodin 基数とそれらよりも大きな可測基数が存在すると仮定すると，すべての射影集合は決定的である．

最終的に ZF+AD の無矛盾性に決着をつけたのは Woodin でした．

Theorem 5.5 (Woodin，1985)**.** Cons(ZF+AD) $\Longleftrightarrow$ Cons(ZFC+ 無限個の Woodin 基数の存在).

こうしてチェスの必勝法に由来する決定性の問題は記述集合論と合流したのち，集合論の様々な分野の発展を促したのでした．AD の無矛盾性という大きな問題が解決されたものの，今でも決定性は集合論，特に内部モデル理論において主軸をなしています．ZF+AD の世界は我々の ZFC の世界とは無関係の平行世界に見えますが，最新の内部モデル理論によれば，一方の世界を知るためには他方の世界を知る必要があるのです．

参考文献

[1] K. Kunen 著，藤田博司訳．集合論　独立性証明への案内．日本評論社，2008.
[2] 田中尚夫，公理的集合論．培風館，1982.
[3] Eureka GAP，強制法入門．2015.
[4] A. J. Kanamori 著，渕野昌訳．巨大基数の集合論．シュプリンガー・フェアラーク東京，1998.
[5] 松原洋，集合論の発展–ゲーデルのプログラムの視点から（ゲーデルと 20 世紀の論理学 4）．東京大学出版会，2007.
[6] Y. N. Moschovakis, Descriptive Set Theory, Second Edition. American Mathematical Society, 2009.
[7] P. B. Larson, A Brief History of Determinacy, unpublished.
[8] D. A. Martin, the book, unpublished.