巨大基数入門

〜可測基数を巡って〜

Eureka GAP

May 17, 2017

目次

発表の目標

- 私の大好きな可測基数と Ultrapower について知ってもらう
- 巨大基数のことも少し知ってもらう
- 集合論は依然フロンティアであると感じてもらう

予備知識

self-contained なので予備知識は不要 !! と言いつつ

- ぴあのんさんの「モデル理論」についての話
- ゼルプスト殿下の「順序数・基数」についての話
- alg_d さんの「無矛盾性証明」についての話

を聞いたような人を想定している.

以下はすべて ZFC からの帰結である.

自然数

自然数とは次のような集合.

$$0 = \emptyset, 1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, \ldots, n+1 = \{0, 1, \ldots, n\}, \ldots$$

各自然数 n は n 元集合で，$0 \in 1 \in 2 \in \cdots$ となっている．自然数 m, n に対して $m < n \overset{\text{def}}{\iff} m \in n$ と定義する． 自然数全体の集合は

$$\omega = \{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$$

と書かれる.

順序数

さらに同様の構成を続ける．

$$\omega+1=\{0,1,\ldots,\omega\}$$
$$\omega+2=\{0,1,\ldots,\omega+1\}$$
$$\vdots$$
$$\omega\cdot 2=\omega+\omega=\{0,1,\ldots,\omega,\omega+1,\ldots\}$$
$$\vdots$$
$$\omega\cdot 3=\omega\cdot 2+\omega$$
$$\vdots$$

このようにして出来上がっていく集合たちのことを順序数とよぶ．順序数 α,β に対して $\alpha<\beta \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \alpha\in\beta$ と定義する．$\alpha+1$ という形で表される順序数を後続順序数，そうでない順序数を極限順序数という．

基数

- 集合 X の濃度 $|X|$ とは，X との全単射が存在する最小の順序数.
- $|\alpha| = \alpha$ となるような順序数 α を基数という.
  基数：$0, 1, \ldots, \omega$. 基数でない：$\omega + 1, \omega + 2, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3$.
- α 番目に大きな無限基数を $\aleph_\alpha$ と書く.

$$\aleph_0 = \omega, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots$$

とりあえず次が分かっていれば OK.

基数 κ は κ 個の元からなる集合である.

到達不能基数

巨大基数とは

ZFC ではその存在の無矛盾性が示せないほど「大きな」基数

のこと．次は巨大基数の一例.

Definition

$\kappa > \omega$ が到達不能基数であるとは，次を満たすことである：

- 強極限：$\forall\lambda < \kappa\ (2^\lambda < \kappa)$.
- 正則：$\forall\alpha < \kappa\ \forall f : \alpha \to \kappa\ (\sup \operatorname{ran}(f) < \kappa)$.

- 強極限とは，冪をとる操作では κ に到達できないということ.
- 正則とは，κ より小さな順序数の極限をとっても κ に到達できないということ．正則の定義に出てくる f としては単調増加なものだけを考えればよい．すると，$\sup \operatorname{ran}(f)$ は $f(0), f(1), \ldots, f(\xi), \ldots$ という長さ α の列の極限値．例えば，任意の $\aleph_{\alpha+1}$ は正則.

到達不能基数

Definition

$\kappa > \omega$ が到達不能基数であるとは，次を満たすことである：

- 強極限：$\forall\lambda < \kappa\ (2^\lambda < \kappa)$.
- 正則：$\forall\alpha < \kappa\ \forall f : \alpha \to \kappa\ (\sup \operatorname{ran}(f) < \kappa)$.

- 到達不能基数が $\kappa = \aleph_{\alpha+1}$ であると仮定すると，$2^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_{\alpha+1}$ なので強極限に矛盾．よって $\kappa = \aleph_\gamma$（γ は極限順序数）．
- さらに正則性を満たすためには $\kappa = \aleph_\kappa$ を満たす必要がある（そうでなければ，$\alpha \to \aleph_\alpha$ という関数が正則性と矛盾）．しかし，この条件は正則性よりはるかに弱い．$\sup\{\aleph_\omega, \aleph_{\aleph_\omega}, \aleph_{\aleph_{\aleph_\omega}}, \ldots\}$ は依然正則ではない．

到達不能基数は存在したとしても非常に大きい！

到達不能基数と無矛盾性

ゲーデルの不完全性定理から，ZFC において（ZFC が無矛盾である限り）ZFC の無矛盾性を示すことはできない． 一方で次が成り立つ．

Theorem

到達不能基数が存在するならば，ZFC の無矛盾性が証明される．

しかし，この逆は言えない．

Theorem

ZFC が無矛盾である限り,「ZFC+到達不能基数が存在する」という公理系の無矛盾性は示すことができない．

つまり，到達不能基数はその存在自体どころか，その存在の無矛盾性すら ZFC からは分からないほど「大きい」．これが巨大基数の特徴である．

巨大基数の意義

集合論において巨大基数は

1. 公理系の無矛盾性を測る基準として
2. ZFC を拡大する妥当な仮定として

用いられている．これらについては追って説明する．

可測基数

可測基数の定義を先に述べる．

Definition

基数 $\kappa > \omega$ が可測基数であるとは，κ 上の κ-完備非単項超フィルターが存在することである．

まずはこの定義の意味するところを説明する．

フィルター

Definition

集合 S 上のフィルター U とは，$U \subseteq \mathcal{P}(S)$ で，次を満たすもの：

- $\emptyset \notin U, S \in U$
- （上に閉）$A \in U \ \& \ A \subseteq B \subseteq S \Rightarrow B \in U$
- （交差で閉）$A, B \in U \Rightarrow A \cap B \in U$

フィルターは S の「大きな部分集合全体」を指している．

1. 単項フィルター：$X \subseteq \omega$ としたとき，$U = \{A \subseteq \omega : X \subseteq A\}$ は ω 上のフィルター．
2. Fréchet フィルター：$U = \{A \subseteq \omega : \omega \setminus A$ は有限 $\}$ は ω 上の非単項フィルター．

フィルター

Definition

U を S 上のフィルターとする．

1. 任意の $A \subseteq S$ に対して，$A \in U$ または $S \setminus A \in U$ が成り立つとき，U を超フィルターとよぶ．
2. U が κ-完備であるとは，任意の $\gamma < \kappa$ に対して，

$$\forall \alpha < \gamma (A_\alpha \in U) \Rightarrow \bigcap_{\alpha < \gamma} A_\alpha \in U$$

が成り立つこと．つまり，κ 未満個の交差で閉なこと．

特に，任意のフィルターは ω-完備である．

可測基数

実は，任意のフィルターは超フィルターに拡大することができるので，次が言える．

Theorem

ω 上の ω-完備非単項超フィルターは存在する．

これが ω より大きな基数でも成り立つかを考えたのが可測基数の定義．

Definition

（再掲）基数 $\kappa > \omega$ が可測基数であるとは，κ 上の κ-完備非単項超フィルターが存在することである．

この「可測」という用語はどこに由来するのか？そのためには歴史的経緯をたどる必要がある．

Banach の測度問題

測度の概念は 1902 年の Lebesgue の論文に遡るが，1930 年頃，Banach はその定義から平行移動不変性をとりのぞき，一般の集合 X 上の測度を考えた．

Question (Banach)

集合 X と X 上の関数 $m\colon \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ で次を満たすものは存在するか？

1. 正規性：$m(X) = 1$.
2. 非自明性：すべての $x \in X$ に対して $m(\{x\}) = 0$.
3. 可算加法性：互いに交わらない $\{X_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して，$m(\bigcup_{n\in\omega} X_n) = \sum_{n\in\omega} m(X_n)$.

この問題においては X の濃度だけが問題なので今後 X として基数 κ をとる．また，測度とはこれらの条件を満たす m のことだとする．

実数値可測

この問いの解となる基数 κ として最小のものをとると次が成立．

4. κ-加法性：任意の $\gamma < \kappa$ と互いに交わらない $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して，$m(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha) = \sum_{\alpha<\gamma} m(X_\alpha)$.
   ただし右辺は有限和の上限を表している．

そこで可算加法性（$=\aleph_1$-加法性）の代わりに κ-加法性を課す．

Definition

基数 $\kappa > \omega$ が実数値可測基数であるとは，κ 上に κ-加法的測度が存在することである．

原子

1930 年，Ulam は実数値可測基数 κ の考察において次の概念に気づいた．

Definition

$A \subseteq \kappa$ が測度 m についての原子であるとは，$m(A) > 0$ かつ，もし $B \subseteq A$ ならば $m(B) = m(A)$ または $m(B) = 0$ であること．

1. 原子がない場合：$\kappa \leq 2^{\aleph_0}$． $\rightarrow$ 飽和イデアルの研究（今回は扱わない）
2. 原子がある場合：原子が存在するとして，それを A とおき，$\mu\colon \mathcal{P}(\kappa) \to [0,1]$ を
$$\mu(X) = \frac{m(X \cap A)}{m(A)}$$
と定める．この μ は値域が $\{0,1\}$ の 2 値測度になっている．

再・可測基数

Definition

κ が可測基数であるとは，κ 上の κ-加法的 2 値測度が存在することである．

κ-加法的 2 値測度 μ と κ-完備非単項超フィルター U は，
$\mu(A) = 1 \iff A \in U$ という同値性を用いることで，一方から他方を構成できる（フィルターとは「大きな部分集合全体」とみなせたを思い出そう）．すなわちこれは最初の定義と同値である：

Definition

（再掲）基数 $\kappa > \omega$ が可測基数であるとは，κ 上の κ-完備非単項超フィルターが存在することである．

注意

もっぱら我々は超フィルターを用いた定義を用いるのだが，超フィルターがどういうものかは想像しにくい．そこで，κ 上にある 2 値測度が入っていて，超フィルターが

$$U = \{A \subseteq \kappa : A \text{ は測度 } 1\}$$

と定められていると考えるとよい．すると，

$$\{\alpha < \kappa : \phi(\alpha)\} \in U$$

とは「ほとんどのところで $\phi(\alpha)$ が成立する」と読める．

Ulam の結果

Ulam はさらに，可測基数が巨大基数であることも示した．

Theorem (Ulam)

可測基数は到達不能である．

すると当然次のような問題が生じる．

Question

最小の可測基数は最小の到達不能基数より真に大きいか？

しかし，意外なことにこの問いは巨大基数の未解決問題として 30 年も立ちはだかることになった．

可測基数が集合論において重要な存在となり得たのは，1960 年代初頭に可測基数と Ultrapower とが結び付けられたことが大きい．このことについて解説するには多少のモデル理論的準備が必要である．

論理式

ここでは論理式といえば，正式には，変数記号 $x, y, z, \ldots$ と論理記号 $\neg, \wedge, \exists, =$，そして $\in$ の組み合わせからなるものだけを指すことにする．つまり，

1. $x = y$ と $x \in y$ は論理式
2. ϕ が論理式なら $\neg\phi$ も論理式
3. ϕ, ψ が論理式なら $\phi \wedge \psi$ も論理式
4. ϕ が論理式なら $\exists x\phi$ も論理式

という規則に従って構成された記号列のみを論理式と定める．$\phi \vee \psi$ は $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$ の略記，$\phi \to \psi$ は $\neg\phi \vee \psi$ の略記，$\forall x\phi$ は $\neg\exists x\neg\phi$ の略記とみなす．

モデル

M を集合またはクラスとし，E を M 上の二項関係とする．このとき (M,E) を構造という．ϕ は論理式に M の元を代入したものだとして，$(M,E)\models\phi$ は次のように定められる．

1. $a,b\in M$ としたとき，
   $(M,E)\models a=b \overset{\text{def}}{\iff} a=b$; $(M,E)\models a\in b \overset{\text{def}}{\iff} aEb$
2. $(M,E)\models\neg\phi \overset{\text{def}}{\iff} (M,E)\not\models\phi$
3. $(M,E)\models\phi\wedge\psi \overset{\text{def}}{\iff} (M,E)\models\phi\ \&\ (M,E)\models\psi$
4. $(M,E)\models\exists x\phi(x) \overset{\text{def}}{\iff}$ ある M の元 a が存在して $(M,E)\models\phi(a)$

$(M,E)\models\phi$ が成り立つとき，(M,E) は ϕ のモデルであるという．また，しばしば $(M,\in)$ は単に M と書く．

初等埋め込み

構造 $(M, E), (N, E')$ に対して，$j\colon M \to N$ が初等埋め込みであるとは，任意の論理式 $\phi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ と M の元 $a_0, \ldots, a_{n-1}$ に対して，

$$(M, E) \models \phi(a_0, \ldots, a_{n-1}) \iff (N, E') \models \phi(j(a_0), \ldots, j(a_{n-1}))$$

が成り立つことである．さらに，j が全単射で，逆写像もまた初等埋め込みになっているとき，j は同型写像という．
※今後初等埋め込みといえば恒等写像は除くことにする．

V

集合全体の集まり $V = \{x : x = x\}$ は真のクラスである．これは次のような構造を持っている．

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \emptyset \\
V_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(V_\alpha) \\
V_\gamma &= \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha \quad (\gamma \text{は極限順序数}) \\
V &= \bigcup_{\alpha\,:\,\text{順序数}} V_\alpha
\end{aligned}
$$

$(V, \in)$ は ZFC のモデルになっている．すなわち，任意の論理式 ϕ と集合 x に対して，

$$\phi(x) \iff (V, \in) \models \phi(x).$$

目標

もっぱらの目標は次を示すことにある．

Theorem

可測基数が存在すれば初等埋め込み $j \colon V \to M$ が存在する．

この証明のために，可測基数上の超フィルターから Ultrapower を構成する．

Ultrapower

1. κ を可測基数，U を κ 上の κ-完備非単項超フィルターとする．
2. κ から V への関数全体のクラス ${}^\kappa V$ を考える．
3. ${}^\kappa V$ 上に次のような同値関係を定める：
$$f \sim g \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U.$$
ここで f の同値類を $[f]$ と書くことにする．そして，$\mathrm{Ult}(V, U) = \{[f] : f \in {}^\kappa V\}$ とおく．(実際はランク[1] が最小なものだけをとって，$[f]$ が集合になるようにする．)
4. $\mathrm{Ult}(V, U)$ 上に次のような関係を定める：
$$[f]\tilde{\in}[g] \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) \in g(\alpha)\} \in U.$$

構造 $(\mathrm{Ult}(V, U), \tilde{\in})$ を V の U による Ultrapower という．

[1]集合 x のランクとは，$x \in V_{\alpha+1}$ となる最小の α を指す．

Ultrapower

このとき $j\colon V \to \mathrm{Ult}(V, U)$ を次のように定める：

$$j(x) = [c_x],\ \text{ただし } c_x \text{ は } x \text{ に値をとる定数関数.}$$

j が初等埋め込みになっていることは次の定理から言える.

Theorem (Łoś)

ϕ を論理式，$f_0, \dots, f_n\colon \kappa \to V$ とすると

$$(\mathrm{Ult}(V, U), \tilde{\in}) \models \phi([f_0], \dots, [f_{n-1}])$$
$$\iff \{\alpha < \kappa : \phi(f_0(\alpha), \dots, f_{n-1}(\alpha))\} \in U.$$

実際にこの定理を用いると以下のようになる.

$$(\mathrm{Ult}(V, U), \tilde{\in}) \models \phi[j(a_0), \dots, j(a_{n-1})]$$
$$\iff (\mathrm{Ult}(V, U), \tilde{\in}) \models \phi)c_{a_0}, \dots, c_{a_{n-1}})$$
$$\iff \{\alpha < \kappa : \phi(c_{a_0}(\alpha), \dots, c_{a_{n-1}}(\alpha))\} \in U \iff \phi(a_0, \dots, a_{n-1}).$$

Łoś の定理の証明

Theorem (Łoś)

ϕ を論理式，$f_0, \ldots, f_n : \kappa \to V$ とすると

$$(\mathrm{Ult}(V,U), \tilde{\in}) \models \phi([f_0], \ldots, [f_{n-1}]) \iff \{\alpha < \kappa : \phi(f_0(\alpha), \ldots, f_{n-1}(\alpha))\} \in U.$$

証明：論理式の構成に関する帰納法を用いる．

1. ϕ が $x = y$ のとき：
   $(\mathrm{Ult}(V,U), \tilde{\in}) \models [f] = [g] \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U.$
   ϕ が $x \in y$ のとき：
   $(\mathrm{Ult}(V,U), \tilde{\in}) \models [f] \tilde{\in} [g] \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) \in g(\alpha)\} \in U.$
   これらは定義から直接言える．

Łoś の定理の証明

2 ϕ が $\neg\psi$ の形のとき：U が超フィルターであることから

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{Ult}(V,U),\tilde{\in}) \models \neg\phi([f_0],\ldots,[f_{n-1}]) \\
\iff\ & (\mathrm{Ult}(V,U),\tilde{\in}) \not\models \psi([f_0],\ldots,[f_{n-1}]) \\
\iff\ & \{\alpha<\kappa : \psi(f_0(\alpha),\ldots,f_{n-1}(\alpha))\} \notin U \\
\iff\ & \{\alpha<\kappa : \neg\psi(f_0(\alpha),\ldots,f_{n-1}(\alpha))\} \in U.
\end{aligned}
$$

3 ϕ が $\psi\wedge\chi$ の形のとき：U が交差で閉じていることから

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{Ult}(V,U),\tilde{\in}) \models (\psi\wedge\chi)([f_0],\ldots,[f_{n-1}]) \\
\iff\ & (\mathrm{Ult}(V,U),\tilde{\in}) \models \psi([f_0],\ldots,[f_{n-1}]) \\
&\qquad \mathrel{\&}\ (\mathrm{Ult}(V,U),\tilde{\in}) \models \chi([f_0],\ldots,[f_{n-1}]) \\
\iff\ & \{\alpha<\kappa : \psi(f_0(\alpha),\ldots,f_{n-1}(\alpha))\} \in U \\
&\qquad \mathrel{\&}\ \{\alpha<\kappa : \chi(f_0(\alpha),\ldots,f_{n-1}(\alpha))\} \in U \\
\iff\ & \{\alpha<\kappa : (\psi\wedge\chi)(f_0(\alpha),\ldots,f_{n-1}(\alpha))\} \in U.
\end{aligned}
$$

Łoś の定理の証明

4. ϕ が $\exists x\psi$ の形のとき：

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{Ult}(V,U),\tilde{\in}) \models \exists x\psi(x,[f_0],\ldots,[f_{n-1}])\\
&\iff [g]\in\mathrm{Ult}(V,U)\text{ が存在し }(\mathrm{Ult}(V,U),\tilde{\in}) \models \psi([g],[f_0],\ldots,[f_{n-1}])\\
&\iff g\colon\kappa\to V\text{ が存在し }\{\alpha<\kappa:\psi(g(\alpha),f_0(\alpha),\ldots,f_{n-1}(\alpha))\}\in U\\
&\iff \{\alpha<\kappa:\exists x\psi(x,f_0(\alpha),\ldots,f_{n-1}(\alpha))\}\in U.
\end{aligned}
$$

以上より，すべての論理式 ϕ に対して，

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{Ult}(V,U),\tilde{\in}) \models \phi([f_0],\ldots,[f_{n-1}])\\
&\qquad\iff \{\alpha<\kappa:\phi(f_0(\alpha),\ldots,f_{n-1}(\alpha))\}\in U
\end{aligned}
$$

となることが示された．

推移崩壊

詳細は省くが，U の完備性は推移崩壊とよばれる同型写像 $\pi\colon (\mathrm{Ult}(V,U),\tilde{\in}) \to (M,\in)$ を作るところで用いられる．
すると，先の $j\colon (V,\in) \to (\mathrm{Ult}(V,U),\tilde{\in})$ と合成して初等埋め込み $i = \pi \circ j\colon (V,\in) \to (M,\in)$ を得ることができる．この写像を Ultrapower map とよぶ．この M のことを Ultrapower とよぶこともある．よって次が示された．

Theorem

可測基数が存在すれば初等埋め込み $j\colon V \to M$ が存在する．

では逆に初等埋め込み $j\colon V \to M$ が存在したならばどうなるか？

初等埋め込みと可測基数

$j\colon V \to M$ を初等埋め込みとする．α を順序数とすると，$j(\alpha)$ もまた順序数で，$j(\alpha) \geq \alpha$ となることが言える．$j(\alpha) > \alpha$ となる最小の順序数 α を j の臨界点とよび，$\mathrm{crit}(j)$ と書く．

Theorem

κ を可測基数とし，$j\colon V \to M$ を Ultrapower map とすると $\mathrm{crit}(j) = \kappa$.

さらに，次が成り立つ．

Theorem

$j\colon V \to M$ を初等埋め込みとし，$\kappa = \mathrm{crit}(j)$ とおく．このとき

$$U = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X)\}$$

は κ 上の κ-完備非単項超フィルターである．ゆえに κ は可測基数である．

初等埋込と可測基数

以上の議論から次が言えた.

Theorem

κ が可測基数であることは, $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ となる初等埋込 $j \colon V \to M$ が存在することと同値.

Ultrapower map $i\colon V \to M$ があるとき，M は次のような意味で V を近似している．

Theorem

κ を可測基数として，$i\colon V \to M$ を Ultrapower map とする．このとき次が成り立つ．

- 任意の $x \in V_\kappa$ に対して $i(x) = x$. また，$V_{\kappa+1} \subseteq M$.
- ${}^{\kappa}M \subseteq M$. 一方で ${}^{\kappa^+}M \not\subseteq M$.

正規性

フィルターにより強い条件を課すことで Ultrapower からより詳細な情報を得ることができる．

Theorem

$\mathrm{id}\colon \kappa \to \kappa$ を恒等写像とする．κ 上の非単項超フィルター U が正規であるとは，$\pi([\mathrm{id}]) = \kappa$ となることである．

正規性については次が成り立つ．

1. 正規性からは κ-完備性が導かれる．
2. U は κ 上の非単項超フィルターで，$f\colon \kappa \to \kappa$ が $\pi([f]) = \kappa$ を満たすなら $U' = \{X \subseteq \kappa : f^{-1}(X) \in U\}$ は正規非単項超フィルター．

Ultrapower の応用

Ultrapower を用いて簡単にわかる結果を 1 つ紹介しよう．

Theorem (Keisler-Tarski)

κ を可測基数とし，U を κ 上の正規非単項超フィルターとすると

$$\{\alpha < \kappa : \alpha \text{は到達不能}\} \in U.$$

証明．$i\colon V \to M$ を Ultrapower map とする．

1. Ulam の結果より κ は到達不能．
2. κ が到達不能基数であるとは，$\forall \lambda < \kappa\ (2^\lambda < \kappa)$ かつ $\forall\, \alpha < \kappa\ \forall f : \alpha \to \kappa\ (\sup \operatorname{ran}(f) < \kappa)$ であったことを思い出すと，$V_{\kappa+1} \subseteq M$ より，$M \models \kappa$は到達不能．
3. U は正規で $\pi([\mathrm{id}]) = \kappa$ だから $(\mathrm{Ult}(V, U), \tilde{\in}) \models [\mathrm{id}]$ は到達不能．
4. Łoś の定理より $\{\alpha < \kappa : \alpha \text{は到達不能}\} \in U$.

Ultrapower の応用

κ 上の κ-完備非単項超フィルター U の任意の元は濃度が κ なので，可測基数 κ は κ 番目の到達不能基数である．ゆえに，

Question

最小の可測基数は最小の到達不能基数より真に大きいか？

に対する解答は YES となる.（ちなみに，この問題は Hanf によってはじめて示され，Ultrapower を用いた証明はその直後に発見された.）

巨大基数は

1. 公理系の無矛盾性を測る基準として
2. ZFC を拡大する妥当な仮定として

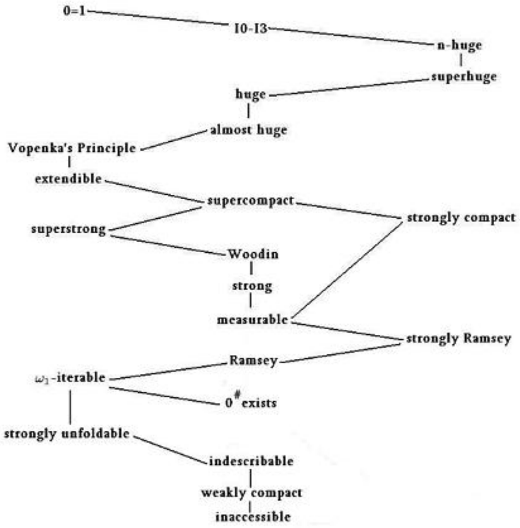
考えられると言った．このうち前者について解説するとともに，可測基数が巨大基数の理論に及ぼした影響をみる．

巨大基数の階層

巨大基数 A が巨大基数 B よりも「大きい」とは

- 巨大基数 A は巨大基数 B でもある，または
- Con(ZFC+A が存在する)⇒Con(ZFC+B が存在する)

が成り立つことにする．今まで考慮されている巨大基数を「大きさ」の順にすると，おおよそ一直線状に並ぶ．


0=1
I0-I3
n-huge
superhuge
huge
almost huge
Vopenka's Principle
extendible
supercompact
strongly compact
superstrong
Woodin
strong
measurable
strongly Ramsey
Ramsey
ω_1-iterable
$0^\#$ exists
strongly unfoldable
indescribable
weakly compact
inaccessible

無矛盾等価

ZFC において証明も反証もできない命題が数多く存在することから，ZF(C)+ϕ といった形の公理系の無矛盾性が問題となる．Con(S) で「S は無矛盾である」という命題を表す．

Definition

公理系 S, T に対して，（ZFC において）Con(S) $\Rightarrow$ Con(T) が成り立つとき，S は T より無矛盾性が強いと言う．逆も成り立つとき，S と T は無矛盾等価であるという．

このような無矛盾性の強さを測るための基準となるのが巨大基数の存在公理．ある公理系 S が与えられたとき，

$$\mathrm{Con}(S) \iff \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}+\text{巨大基数 } A \text{ が存在する})$$

となるような巨大基数 A を見つけたならば，S の無矛盾性の強さは分かったと言える．

次の定理を思い出そう.

Theorem

κ が可測基数であることと，$\mathrm{crit}(j) = \kappa$ となる初等埋込 $j\colon V \to M$ が存在することは同値.

このような初等埋め込みによる巨大基数の特徴づけは，より「大きな」巨大基数に対しても用いられるようになった．また，次が成り立ったのであった.

Theorem

κ を可測基数として，$i\colon V \to M$ を Ultrapower map とする．このとき次が成り立つ.

- 任意の $x \in V_\kappa$ に対して $i(x) = x$. また，$V_{\kappa+1} \subseteq M$.
- ${}^{\kappa}M \subseteq M$. 一方で ${}^{\kappa^+}M \not\subseteq M$.

Strongness

Definition

- κ が γ-strong であるとは，ある初等埋め込み $j\colon V \to M$ が存在して $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ かつ $V_{\kappa+\gamma} \subseteq M$ であること．
- κ が strong であるとは，κ がすべての順序数 γ に対して γ-strong であること．
- κ が superstrong であるとは，ある初等埋め込み $j\colon V \to M$ が存在して $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ かつ $V_{j(\kappa)} \subseteq M$ であること．

$i\colon V \to M$ を可測基数 κ によって生じる Ultrapower map とする．
$V_{\kappa+1} \subseteq M$ であることに注意すると，可測基数 κ は 1-strong となる．

Supercompactness

Definition

- κ が γ-supercompact であるとは，ある初等埋め込み $j\colon V \to M$ が存在して，$\mathrm{crit}(j) = \kappa$ かつ ${}^{\gamma}M \subseteq M$ であること．
- κ が supercompact であるとは，すべての順序数 γ に対して γ-supercompact であること．
- κ が huge であるとは，ある初等埋め込み $j\colon V \to M$ が存在して，$\mathrm{crit}(j) = \kappa$ かつ ${}^{j(\kappa)}M \subseteq M$ であること．

$i\colon V \to M$ を可測基数 κ によって生じる Ultrapower map とする．${}^{\kappa}M \subseteq M$ であることに注意すると，可測基数 κ は κ-supercompact であることが分かる．

ある初等埋め込み $j\colon V \to M$ の臨界点として定められる巨大基数は，M が V に近づくほど「大きく」なっていく．では次のような巨大基数はある意味で究極の巨大基数ではないだろうか？

Definition

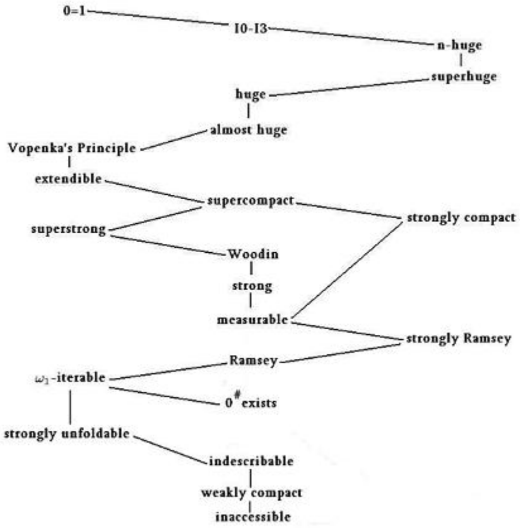
κ が Reinhardt 基数であるとは，ある初等埋込 $j\colon V \to V$ が存在して，$\mathrm{crit}(j) = \kappa$ であること．

しかし，ZFC において次が成り立つ．

Theorem (Kunen)

Reinhardt 基数が存在する $\iff 0 = 1$.

ZF でもこの結果が成り立つかどうかは未解決．


0=1
I0-I3
n-huge
superhuge
huge
almost huge
Vopenka's Principle
extendible
supercompact
strongly compact
superstrong
Woodin
strong
measurable
strongly Ramsey
Ramsey
ω_1-iterable
$0^\#$ exists
strongly unfoldable
indescribable
weakly compact
inaccessible

Inner Model Program

可測基数に関する研究は内部モデル理論にも影響を及ぼした．

- 内部モデルとは，すべての順序数を含む推移的な ZF(C) モデル．
- Inner Model Program とは巨大基数を含むような ZF(C) の「自然な」内部モデルを探す試みである．
- 巨大基数公理との無矛盾等価性を示すのに，しばしばそのような内部モデルを用いるため，この Program は非常に重要だと言える．

L

もっとも基本的な内部モデルは Gödel によって構成された L である．L は最小の内部モデルであり，これが V と等しいという命題は $V = L$ と表される．$V = L$ は ZFC から証明も反証もできない．しかし，この「ZFC の壁」は巨大基数によって乗り越えることが可能である．

Theorem (Scott)

可測基数が存在するならば，$V \neq L$ である．

このことは L が可測基数を含まないことも意味している．つまり L という内部モデルは可測基数にとって小さすぎるのである．

この Scott の結果は巨大基数を考える意義の 2 番目

2. ZFC を拡大する妥当な仮定として

とも関わっている.「集合は考えられる限り多くあるべきである」というある種の集合論的直感によって，$V = L$ は集合論の公理としては妥当とは言えない一方で，巨大基数の存在仮定は妥当であると言える．また，巨大基数の存在によって，ZFC の無矛盾性や $V \neq L$ といった「ZFC の壁」に阻まれて示せないような成り立つべき命題も示せるのである.

内部モデル理論の発展

- L には可測基数が含まれない一方で，可測基数上の超フィルター U を用いて作られる $L[U]$ という内部モデルには可測基数がただ 1 つ含まれる．
- このモデルについては Kunen によって Iterated Ultrapwoer を用いた解析がなされた．
- Kunen による議論をもとにして，内部モデルの理論は様々な人々によって推し進められた．現在，Inner Model Program は strong 基数や，それよりも大きな基数である Woodin 基数に対しては達成されている．

その一方で次の問題は未解決である．

Question

supercompact 基数を含む自然な内部モデルは存在するか？存在するならば，それはどのように構成されるか？

supercompact 基数のレベルにおいては今までの内部モデルの手法がうまく働かないという結果も知られており，解決には新たな手法やアプローチが必要であろうと思われる．この問題は内部モデル理論の誕生当初からあるものの，いまだに集合論における最重要未解決問題として立ちはだかっている．

まとめ

1. 巨大基数とはその存在が ZFC と無矛盾であることも示せないほど「大きい」集合である.
2. 巨大基数は無矛盾性の強さの基準として，ZFC の拡張として用いられる.
3. その中でも可測基数と Ultrapower の手法は巨大基数の理論，内部モデル理論に大きな影響を及ぼしたと言える.

参考文献

1. ケネス・キューネン（2008）『集合論 独立性証明への案内』 藤田博司訳，日本評論社.
2. 新井敏康（2012）『数学基礎論』 岩波書店.
3. A. カナモリ（1998）『巨大基数の集合論』 渕野昌訳，シュプリンガー・フェアラーク東京.