順序数・基数

Eureka GAP

2017 年 5 月 18 日

概要

[3] で取り上げられているような素朴集合論的事実を前提知識として，順序数と基数についての入門的事実を述べる．基本的に基礎の公理と選択公理は使わないで議論するが，第 2 章の一部の定義・定理において選択公理の使用が避けられない箇所については (AC) と表記している．

1　順序数

1.1　整列順序

順序数についての理論を展開する前に，整列順序について復習する．この節は素朴集合論の範疇であるため，この節で提示する補題などは証明を付けずに参考文献 [3] に譲ることとした．ただし，この PDF における関係と関数の定義に注意されたい．関係とは，すべての元が順序対であるような集合である．R を関係としたとき，

$$\mathrm{dom}(R) = \{x \mid \exists y \langle x, y\rangle \in R\}$$
$$\mathrm{ran}(R) = \{y \mid \exists x \langle x, y\rangle \in R\}$$

と定める．また，f が関数もしくは写像であるとは，それが関係であり，かつ

$$\forall x \in \mathrm{dom}(f) \exists! y \in \mathrm{ran}(f) \langle x, y\rangle \in f$$

を満たすことである．

Definition 1.1.1. 集合 A と関係 R が次の条件を満たすとき，R は A 上の（**順序（order）**である，または R は A を順序づけるという．

(1) $\forall x \in A \neg(xRx)$　（非反射律）
(2) $\forall x, y, z \in A(xRy \wedge yRz \to xRz)$　（推移律）

今回順序といえばこの非反射的な順序をさすことにするが，反射的な順序も考えることができる．

Definition 1.1.2. 集合 A と順序 R がさらに

$$\forall x, y \in A(xRy \vee yRx \vee x = y) \quad（三者択一）$$

を満たすならば R は A 上の**全順序（total order）**である，または R は A を全順序づけるという．

Definition 1.1.3. 集合 A と順序 R に対して，A の空でない部分集合に必ず R-最小の要素がある場合，R は A 上の**整列順序（well-order）**である，または R は A を整列順序付けるという．

整列順序が全順序であることは，任意の $x, y \in A$ をとってきたときに，$\{x, y\}$ に R-最小の要素があることから明らかである．

A や R が真のクラス[*1]の場合もここまでの定義を踏襲する．ただし，整列順序の定義においては，R 切片が集合であるという条件を追加する．

Definition 1.1.4. 集合と〔全，整列〕順序の対 $\langle A, R\rangle$ を〔全，整列〕順序集合または単に〔全，整列〕順序とよぶ．

Definition 1.1.5. $\langle A, R\rangle, \langle B, S\rangle$ を順序集合とする．

(1) $f\colon A \to B$ が**順序保存写像**であるとは，

$$\forall x, y \in A(xRy \to f(x)Sf(y))$$

が成り立つことである．

(2) $f\colon A \to B$ が**順序同型写像**であるとは，全単射な順序保存写像かつ $f^{-1}\colon B \to A$ も順序保存同型であることである．このとき，$\langle A, R\rangle$ と $\langle B, S\rangle$ は**同型**であるといい，$\langle A, R\rangle \simeq \langle B, S\rangle$ と書く．

全順序の間の全単射な順序保存写像は順序同型写像であるが，一般の順序についてはそうではない（とても簡単な反例が存在する）．

Definition 1.1.6. $\langle A, R\rangle$ を順序集合とする．このとき，$a \in A$ に対して，

$$\mathrm{seg}_{\langle A, R\rangle}(a) = \{x \in A \mid xRa\}$$

を a による **R-切片（segment）**という．文脈から R が何かわかる場合が多いので，そういう場合は単に切片と言ったり，$\mathrm{seg}_A(a)$ と書いたりする．

$\langle A, R\rangle$ が全順序である場合，$B \subseteq A$ に対して，$\langle B, R\rangle$ が全順序であることは自明である．整列順序 $\langle A, R\rangle$ の任意の R-切片 $\mathrm{seg}_{\langle A, R\rangle}(a)$ もまた R によって整列順序づけられることも容易にわかる．

いくつかの補題や定理を列挙する．

Lemma 1.1.7. $\langle A, R\rangle$ を整列順序とするとき，任意の $a \in A$ に対して $\langle A, R\rangle \not\simeq \langle \mathrm{seg}_{\langle A, R\rangle}(a), R\rangle$ である．

Lemma 1.1.8 (同型写像の一意性)**.** 二つの整列順序 $\langle A, R\rangle$ と $\langle B, S\rangle$ の間に同型写像が存在すれば一意．

Lemma 1.1.9. $\langle A, R\rangle$ を整列順序とし，$x, y \in A, x \neq y$ とすると

$$\langle \mathrm{seg}_A(x), R\rangle \not\simeq \langle \mathrm{seg}_A(y), R\rangle.$$

Lemma 1.1.10 (切片の 1 対 1 対応)**.** 2 つの整列順序 $\langle A, R\rangle, \langle B, S\rangle$ が同型であるとする．このとき，任意の $a \in A$ に対して $b \in B$ が一意に存在して

$$\langle \mathrm{seg}_A(a), R\rangle \simeq \langle \mathrm{seg}_B(b), S\rangle.$$

[*1] ここでいうクラスとは definable class のことである．すなわち，ある論理式 ϕ を用いて $\{x \mid \phi(x)\}$ と書けるような（集合とは限らない）集まりをクラスといい，集合でないクラスは真のクラスとよぶ．しかし，実際は真のクラスを ZFC 集合論で扱うことはできないため，真のクラスを含む命題は単に論理式の略記をしていると考える．例えば，あとに登場する $x \in \mathrm{On}$ という命題は「x は順序数である」という論理式の略記にすぎない．

Theorem 1.1.11 (整列順序の比較定理). $\langle A, R\rangle$ と $\langle B, S\rangle$ が整列順序であるとすると，次のうちいずれか一つだけが成り立つ.

(1) $\langle A, R\rangle \simeq \langle B, S\rangle$.
(2) ある $b \in B$ が存在して $\langle A, R\rangle \simeq \langle \mathrm{seg}_B(b), S\rangle$.
(3) ある $a \in A$ が存在して $\langle \mathrm{seg}_A(a), R\rangle \simeq \langle B, S\rangle$.

1.2　順序数の定義とその性質

Definition 1.2.1. 集合 x が**推移的（transitive）**であるとは，

$$\forall v(v \in x \to v \subseteq x)$$

となることである．これは x の元の元もまた x に属しているということである．

Definition 1.2.2. 推移的かつ $\in$ によって整列順序づけされる集合を**順序数（ordinal）**とよぶ.

順序数 x を順序集合として扱うときは常に $\langle x, \in\rangle$ を考えるので，この $\in$ はたびたび省略される．たとえば順序数 x の $\in$-切片は $\mathrm{seg}_x(y)$ のように $\in$ が省略された形で書かれる.

順序数全体を On と書くことにする．まず，On が $\in$ によって整列順序づけられている真のクラスであることを示すのが最初の目標である.

Lemma 1.2.3. x を順序数とすれば次が成り立つ：

(1) $x \notin x$.
(2) $y \in x$ ならば，y は順序数かつ $y = \mathrm{seg}_x(y)$.
(3) y が x の切片ならば，y は順序数かつ $y \in x$.
(4) y は順序数で，x と順序集合として同型ならば，$x = y$.

Proof. (1)(2)(3) 容易．(4)x から y への順序同型を f とし，$M = \{z \in x \mid z \neq f(z)\}$ が空でないと仮定する．M の最小元をとると矛盾が生じる. □

Lemma 1.2.4.

(1) x, y を順序数とする．このとき，$x = y$，$x \in y$，$y \in x$ のいずれかが成立.
(2) x, y, z を順序数とする．このとき，$x \in y$ かつ $y \in z$ ならば $x \in z$.
(3) C を順序数からなる空でない集合とする．このとき，C は $\in$-最小要素をもつ．すなわち，

$$\exists x \in C \forall y \in C(x = y \vee x \in y).$$

Proof. (1) 整列順序の比較定理 1.1.11 と 1.2.3(3)(4) による．(2) 容易．(3)(1) を用いると示したいことは $\exists x \in C(x \cap C = 0)$ と同値である．任意の x をとり，$x \cap C$ が空でないならば，$\in$-最小要素 x_0 がとれて，$x_0 \cap C = 0$. □

Corollary 1.2.5. 順序数からなる集合 C が推移的ならば，C 自身もまた順序数.

Proof. 1.2.3(1)，1.2.4 より明らか. □

Corollary 1.2.6. On は真のクラス.

Proof. On が集合であるとすると，1.2.4(2) より推移的で，1.2.5 より On もまた順序数である．しかし，On $\in$ On となるので 1.2.3(1) と矛盾． $\square$

On の任意の $\in$-切片は順序数だから，集合である．よって，1.2.4 より $\in$ はクラス On 上の整列順序である．以降は $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ などのギリシャ文字で順序数を表す．また，$\alpha \in \beta$ を $\alpha < \beta$ と書き，$\alpha \in \beta$ または $\alpha = \beta$ であることを $\alpha \leq \beta$ と書くことにする．

次に，順序数には 2 つの種類があること，自然数は順序数の一部として定義されることを述べる．

Lemma 1.2.7. 任意の順序数 α, β に対して $\alpha \leq \beta \iff \alpha \subseteq \beta$.

Proof. 順序数の推移性と 1.2.4(1) より従う． $\square$

Definition 1.2.8. $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ を α の**後続**（**successor**）とよぶ.

Lemma 1.2.9. 任意の順序数 α, β に対して次が成り立つ.

(1) $S(\alpha)$ は順序数.
(2) $\beta < S(\alpha) \Leftrightarrow \beta \leq \alpha$.
(3) $\alpha < \beta \Leftrightarrow S(\alpha) \leq \beta$.

Proof. (1)$S(\alpha)$ は推移的なので 1.2.5 より従う．(2)$S(\alpha)$ の定義より自明．(3)$\alpha < \beta$ より $\alpha \in \beta$ かつ $\alpha \subseteq \beta$ なので，$S(\alpha) \subseteq \beta$ であり，1.2.7 より $S(\alpha) \leq \beta$. $\square$

この補題の (3) より，$S(\alpha)$ は α より大きな順序数の中で最小のものである．

Definition 1.2.10. α を順序数とする．ある順序数 β が存在して $\alpha = S(\beta)$ となるとき，α は**後続型順序数**（**successor ordinal**）という．0 でも後続型順序数でもない順序数を**極限順序数**（**limit ordinal**）という．

Definition 1.2.11. 順序数 α が**自然数**（**natural number**）であるとは,

$$\forall \beta \leq \alpha (\beta = 0 \vee \beta \text{は後続順序数})$$

となることである.

Definition 1.2.12. 自然数全体の集合を ω とする.

自然数全体が集合として存在することは無限公理より保証される．

Lemma 1.2.13.

(1) n を自然数とすれば，$S(n)$ も自然数である．
(2) ω は最小の極限順序数である．

Proof. (1) 定義より容易に示される．(2)ω は明らかに 0 ではない．また，後続順序数であるとすると，(1) より ω 自身も自然数となり，$\omega \in \omega$ となってしまい，1.2.3(1) に矛盾．よって ω は極限順序数である．ω より小さい順序数は自然数なので明らかに極限順序数ではない． $\square$

このようにして定義した自然数は次にあげるペアノの公理を満たす．

Theorem 1.2.14.

(1) $0 \in \omega$.

(2) $\forall n \in \omega(S(n) \in \omega)$.

(3) $\forall m, n \in \omega(m \neq n \to S(m) \neq S(n))$.

(4)（数学的帰納法）$\forall X \subseteq \omega((0 \in X \land \forall n \in X(S(n) \in X)) \to X = \omega)$.

Proof. (1) 自明．(2)1.2.13(1) ですでに示した．(3)1.2.9(2)(3) を用いて $n < m \Leftrightarrow S(n) \leq m \Leftrightarrow S(n) < S(m)$．(4) 背理法で示す．$X$ は主張の前半の仮定を満たし，かつ $X \neq \omega$ であったとする．$\omega \backslash X$ は空でない順序数の集合なので 1.2.5(3) よりその最小要素 m が取れる．ある n が存在して $m = S(n)$ だったとすれば，m の最小性より $n \in X$ であり，X の仮定より $m \in X$ となってしまって矛盾．よって，m は極限順序数となるが，$m \in \omega$ より，1.2.13(2) と矛盾する． □

このように定義された順序数は「整列順序の型」を表すことを示してこの節を終える．

Theorem 1.2.15. 整列順序 $\langle A, R\rangle$ に対して，ただ一つに定まる順序数 C が存在して $\langle A, R\rangle \simeq C$.

Proof. C が存在すれば一意であることは 1.2.3(4) より言える．C の存在を示す．まず，

$$B = \{a \in A \mid \exists x(x \text{ は順序数} \land \langle \mathrm{seg}_A(a), R\rangle \simeq x)\}$$

とおく．そして，任意の $a \in B$ に対して $f(a)$ を上式で存在が保障される x として，B を定義域とする関数 f を定義する．再び 1.2.3(4) を用いていることで，この f が well-defined であることが分かる．C は f による B の像とする．

この C が順序数であることを示そう．任意の $x \in C$ と $y \in x$ をとる．このとき 1.2.3(2) より y は x の切片である．よって，y と順序同型な $\langle \mathrm{seg}_A(a), R\rangle$ の切片が存在し，それは A の切片でもあるから，1.1.10 より，ある $b \in B$ が存在して，$\langle \mathrm{seg}_A(b), R\rangle \simeq y$ が成り立つ．よって，$y \in C$ である．ゆえに C は推移的な順序数の集合だから，1.2.5 より C 自身もまた順序数である．

次に f が $\langle B, R\rangle$ から C への同型写像であることを示す．$x, y \in B$ かつ xRy とする．また，$D = \langle \mathrm{seg}_B(x), R\rangle, E = \langle \mathrm{seg}_B(y), R\rangle$ と書くことにすると，$f(x) \simeq D$，$f(y) \simeq E$ である．xRy より，$D = \mathrm{seg}_E(x)$．1.1.10, 1.2.3(3) より，ある $z \in f(y)$ が存在して，$z \simeq D$．よって $z \simeq f(x)$ で，どちらも順序数だから $z = f(x)$．ゆえに $f(x) \in f(y)$ となり，f は順序保存写像．さらに，f は定義より全単射で，$\langle B, R\rangle$ と C は全順序なので f は順序同型である．

最後に，$A = B$ であることを示す．任意の $b \in B$ をとって固定する．任意の $a \in A$ に対して，aRb ならば $a \in B$ となることを示す．$\langle \mathrm{seg}_A(b), R\rangle \simeq f(b)$ より 1.1.10，1.2.3(3) を用いると，ある $x \in f(b)$ が存在して $\langle Seg_A(a), R\rangle \simeq x$．また，$C$ は推移的だから，$x \in f(b)$ かつ $f(b) \in C$ より $x \in C$．よって $a \in B$．すなわち，B は A または A のある切片と等しい．ここで後者が成り立つとする．すなわち，ある $a \in A$ が存在して $B = Seg_A(a)$ であるとすると，$\langle B, R\rangle \simeq C$ であることと B の定義から $a \in B$ が従う．すると $\mathrm{seg}_A(a) = \{x \in A \mid xRa\}$ より aRa が導けてしまい，順序 R の非反射性に反する．よって，$A = B$ である．

以上より，あるただ一つの順序数 C が存在して $\langle A, R\rangle \simeq C$ であることが示された． □

Definition 1.2.16. 整列順序 $\langle A, R\rangle$ の**順序型（order type）**とは，$\langle A, R\rangle \simeq C$ となるただ一つの順序数 C のことであり，$\mathrm{type}(A, R)$ と書く．

1.3 順序数の演算

順序数の演算を定義する．

Definition 1.3.1. 順序数 α, β の和 $\alpha + \beta$ を次のように定める：

$$\alpha + \beta = \mathrm{type}((\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\}), R)$$

ただし，R は

(1) 任意の $\xi < \alpha, \eta < \beta$ に対して，$\langle \xi, 0 \rangle R \langle \eta, 0 \rangle \iff \xi < \eta$.
(2) 任意の $\xi < \alpha, \eta < \beta$ に対して，$\langle \xi, 0 \rangle R \langle \eta, 1 \rangle$.
(3) 任意の $\xi < \alpha, \eta < \beta$ に対して，$\langle \xi, 1 \rangle R \langle \eta, 1 \rangle \iff \xi < \eta$.

と定義される順序とする．

順序 R が $\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}$ を整列順序づけることは容易に確認できる．$\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}$ は α と β の直和とよび，$\alpha \sqcup \beta$ と略記する．

Definition 1.3.2. 順序数 α, β の積 $\alpha \cdot \beta$ を次のように定める：

$$\alpha \cdot \beta = \mathrm{type}(\beta \times \alpha, R)$$

ただし，R は辞書式順序，すなわち任意の $\xi_1, \xi_2 < \beta$ と $\eta_1, \eta_2 < \alpha$ に対して，

$$\langle \xi_1, \eta_1 \rangle R \langle \xi_2, \eta_2 \rangle \iff (\xi_1 < \xi_2 \vee (\xi_1 = \xi_2 \wedge \eta_1 < \eta_2)).$$

と定義される順序とする．

R が $\beta \times \alpha$ を整列順序づけることもまた容易に確認できる．

Lemma 1.3.3. 順序数 α, β, γ の演算と大小関係について以下が成り立つ．

(1) $\alpha + \beta = \alpha + \gamma \iff \beta = \gamma$
(2) $\alpha + \beta < \alpha + \gamma \iff \beta < \gamma$
(3) $\alpha + \gamma < \beta + \gamma \Longrightarrow \alpha < \beta$
(4) $\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$
(5) $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma \iff \beta = \gamma$
(6) $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma \iff \beta < \gamma$
(7) $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma \Longrightarrow \alpha < \beta$
(8) $\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$

Proof. 集合間の順序同型を構成することで等号を示し，一方が他方の切片であることを示すことで不等号を示していく．手間はかかるが，straightforward な証明なので省く． □

順序数の演算でむしろ気をつけるべきは何が成り立たないかである．まず，和も積も可換ではない．例えば，$\omega + 1 \neq 1 + \omega = \omega$ だし，$\omega \cdot 2 \neq 2 \cdot \omega = \omega$ である．また，上の補題で (3) の逆が成り立たないことは $1 + \omega = 2 + \omega = \omega$ から，(7) の逆が成り立たないことは $1 \cdot \omega = 2 \cdot \omega = \omega$ から明らかである．

Definition 1.3.4. X を順序数の集合として，$\sup X = \bigcup X$．

Lemma 1.3.5. $\sup X$ は X の上限となるような順序数である．

Proof. 任意の $\alpha \in \sup X$ に対して，ある $x \in X$ が存在し，$\alpha \in x$．任意の $\beta \in \alpha$ に対して，順序数の推移性から $\beta \in x$ なので，$\beta \in \sup X$．よって，$\sup X$ は推移的で，1.2.5 より $\sup X$ は順序数．また，任意の $x \in X$ に対して $x \subseteq \bigcup X$ なので，$x \leq \sup X$．そして，$\forall x \in X(x \leq \gamma)$ を満たす任意の順序数 γ をとると，$\neg\exists x \in X(\gamma \in x)$ より $\gamma \notin \bigcup X$．すなわち $\sup X \leq \gamma$． □

Theorem 1.3.6. 順序数 α, β, γ の和と積について次が成り立つ．

(1) $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$
(2) $\alpha + 1 = S(\alpha)$
(3) $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$
(4) β が極限順序数のとき，$\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi \mid \xi < \beta\}$
(5) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
(6) $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$
(7) $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$
(8) $\alpha \cdot S(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$
(9) β が極限順序数のとき，$\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \xi \mid \xi < \beta\}$
(10) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
(11) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

Proof. どれも定義から容易に従う． □

順序数の冪も次のように定義できる．

Definition 1.3.7. β を順序数，$\langle \alpha_\xi \mid \xi < \beta \rangle$ を長さ β の順序数列とする．このとき，

$$\prod_{\xi < \beta} \alpha_\xi = \{f \colon \beta \to \bigcup\{\alpha_\xi \mid \xi < \beta\} \mid \forall \xi < \beta(f(\xi) \in \alpha_\xi)\}$$

と定義する．α を順序数として，どの $\xi < \beta$ に対しても $\alpha_\xi = \alpha$ である場合を考え，

$$A = \{f \in \prod_{\xi < \beta} \alpha \mid f \text{ の値は有限個を除いて } 0 \text{ である }\}$$

とおく．そして，$f \neq g$ なる $f, g \in u$ に対し $f(\xi) \neq g(\xi)$ となる最大の ξ を $\xi_{f,g}$ で表す．A 上の順序 R を，任意の $f, g \in A$ に対して，

$$fRg \iff f(\xi_{f,g}) < g(\xi_{f,g})$$

と定義される順序とする．この R は A 上の整列順序（末尾違い順序）である．このとき，順序数の冪 α^β は

$$\alpha^\beta = \mathrm{type}(A, R)$$

と定義される．

我々は次の節でこれと同値な冪の定義を与える．

1.4 超限帰納法

Theorem 1.4.1 (超限帰納法の原理)**.** 空でない On の部分クラス C は $\in$-最小要素をもつ．

Proof. 1.2.5(3) と全く同様である． □

Theorem 1.4.2 (超限帰納法による証明)**.** C を空でない On の部分クラス，$\phi(x)$ を論理式とすると次が成り立つ：

$$\forall\alpha \in C((\forall\beta < \alpha\phi(\beta)) \to \phi(\alpha)) \to \forall\alpha \in \mathbf{C}\phi(\alpha).$$

Proof. 超限帰納法の前提を仮定し $\neg\forall\alpha \in C\phi(\alpha)$ とする．このとき $\{\alpha \in C \mid \neg\phi(\alpha)\}$ は On の空でない部分クラスである．1.4.1 よりこれの最小要素をとると矛盾が生じる． □

超限再帰法を用いると On 上のクラス関数を定義することができる．V はすべての集合からなるクラスとする．

Theorem 1.4.3 (On 上の超限再帰)**.** $F\colon V \to V$ に対して

$$\forall\alpha \in \mathrm{On}(G(\alpha) = F(G \restriction \alpha))$$

を満たす $G\colon \mathrm{On} \to V$ がただ一つ定まる．[*2]

Proof. 求める G が一意であることは超限帰納法から簡単に導けるので，以下では G の存在を示す．順序数 δ 上で定義される関数 g が

$$\forall\alpha < \delta(g(\alpha) = F(g \restriction \alpha))$$

となっているとき g を δ-近似とよぶことにする．$\delta \leq \delta'$ で，g が δ-近似，g' が δ'-近似ならば，$g \subseteq g'$ である．そこで，G をこれら δ-近似の和とする．すなわち，

$$G = \{\langle x, y\rangle \mid \exists g\exists\delta(\langle x, y\rangle \in g \wedge g \text{ は}\delta\text{-近似})\}$$

とおく．明らかに G は関数である．

このいて G が求めるクラス関数であることを超限帰納法で示す．帰納法の仮定として，G は α 未満まで定義されていて，

$$\forall\beta < \alpha(G(\beta) = F(G \restriction \beta))$$

を満たすと仮定する．$\alpha + 1$ 上の関数 g を $g = G \restriction \alpha \cup \{\langle\alpha, F(G \restriction \alpha)\rangle\}$ で定義すると，$g \restriction \alpha = G \restriction \alpha$ かつ $f(\alpha) = F(G \restriction \alpha) = F(g \restriction \alpha)$ である．帰納法の仮定も用いると，

$$\forall\beta < \alpha + 1(g(\beta) = F(g \restriction \beta))$$

となるから，この g は $\alpha + 1$-近似である．よって，$\langle\alpha, F(G \restriction \alpha)\rangle \in G$ であり，$G(\alpha) = F(G \restriction \alpha)$．ゆえに超限帰納法により G は On 上で定義されるクラス関数である． □

超限再帰による定義は様々なところで用いられる．前節で定義した順序数の冪は超限再帰による定義を用いると次のような簡潔なものとなる．

[*2] 式に含まれる $G \restriction \alpha$ とはクラス関数 G の α への制限のことである．

Definition 1.4.4. 順序数 α, β に対してその冪 α^β を β に関する超限再帰によって次のように定義する：

(1) $\alpha^0 = 1$.
(2) $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$.
(3) β が極限順序数のとき，$\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\xi \mid \xi < \beta\}$.

前節で定義した順序数の冪が，この超限再帰における式を満たすことは簡単に示せる．すると，1.4.3 より，2 つの定義は一致する．

2 基数

2.1 基数の定義とその性質

Definition 2.1.1. A, B を集合として，次のように定める．

(1) $A \precsim B$ とは，A から B への単射があること．
(2) $A \approx B$ とは，A から B への全単射があること．
(3) $A \prec B$ とは，$A \precsim B$ かつ $A \not\approx B$ ということ．

$\precsim$ は推移律を満たす．また，$\approx$ は同値関係である．

Theorem 2.1.2 (Bernstein の定理)**.** A, B を集合とすると次が成り立つ．

$$A \precsim B \wedge B \precsim A \Longrightarrow A \approx B$$

証明は省略する．[3] を参照．

Definition 2.1.3. 集合 A が整列可能集合である，すなわち A 上の整列順序が存在すると仮定する．このとき，A の**濃度（cardinality）**とは，$\alpha \approx A$ となるような最小の順序数 α のことである．

A は整列可能とし，A 上の整列順序 R をとる．すると A と $\mathrm{type}(A, R)$ の間には全単射が存在するから，$A \approx \alpha$ となる順序数 α は少なくとも 1 つは存在する．よって、上の定義は well-defined である．選択公理を仮定すると，すべての集合は整列可能であることが示せる．その証明は [3] で述べられている．よって，選択公理のもとではすべての集合に対して濃度を定義することができる．一方，選択公理を用いないと，どの順序数との間にも全単射が存在しないような集合が存在する可能性がある．

Definition 2.1.4. 順序数 α で，$|\alpha| = \alpha$ となるものを**基数（cardinal）**という．

基数を表すには κ, λ, μ などのギリシア文字を使うのが普通である．

Lemma 2.1.5. A, B を整列可能集合として次が成り立つ．

(1) α を順序数とすると $|\alpha| \leq \alpha$.
(2) 濃度 $|A|$ は基数である．
(3) $A \approx B \iff |A| = |B|$.
(4) $A \subseteq B \Longrightarrow |A| \leq |B|$.
(5) $A \precsim B \iff |A| \leq |B|$.

(6) $B \neq \emptyset$ とする．このとき，A から B への全射が存在する $\iff$ $|A| \geq |B|$.

Proof.

(1) 濃度の最小性より明らか.
(2) (1) より従う.
(3) $A \approx B$ より，$|A| \approx |B|$ だが，A の濃度の最小性より，$|A| \leq |B|$．A と B を入れ替えて議論すれば，$|B| \leq |A|$．ゆえに，$|A| = |B|$ である.
(4) $B \approx |B|$ なので $A \approx C \subseteq |B|$ なる C が存在する．C は順序数の集合なので，$\alpha = \mathrm{type}(C, \in)$ とおける．$A \approx C \approx \alpha$ より $|A| \leq \alpha$．α から C への同型写像を f とおく．このとき $\forall x \in \alpha(x \leq f(x))$ である．実際，もしこれが成り立たないとすると，$\{x \in \alpha \mid f(x) < x\}$ は空でない順序数の集合なので，その最小要素 m がとれる．このとき $f(m) < m$ で，m の最小性より $f(f(m)) \geq m$ だが，これは f が同型写像であることに反する．$\forall x \in \alpha(x \leq f(x))$ を用いると，任意の $x \in \alpha$ に対して，$x \leq f(x) \in C \subseteq |B|$ である．よって，$\alpha \subseteq |B|$，すなわち $\alpha \leq |B|$．したがって，$|A| \leq \alpha \leq |B|$.
(5) A から B への単射があるとする．この単射による A の像を C とすれば，$A \approx C$ かつ $C \subseteq B$ なので，(2)(4) より $|A| = |C| = |B|$ である．逆方向を示すため，$|A| \leq |B|$ とする．このとき，$A \precsim |A| \precsim |B| \precsim B$ より，$A \precsim B$ である.
(6) (5) より，A から B への全射が存在することと，B から A への単射が存在することが同値であることを言えばよいと分かる．全射 $f \colon A \to B$ が存在すると仮定する．任意の $b \in B$ に対し，$f^{-1}(\{b\})$ の（B 上に入る整列順序の意味での）最小元をとって $g(b)$ とすることで，$g \colon B \to A$ を定める．この g は単射である．逆に，単射 $g \colon B \to A$ が与えられたとき，ある $b \in B$ を固定しておいて，$f \colon A \to B$ を

$$f(a) = \begin{cases} g^{-1}(a) & (a \in \mathrm{ran}(g)) \\ b & (a \notin \mathrm{ran}(g)) \end{cases}$$

で定めると，f は全射である.

□

Lemma 2.1.6. 順序数 α, β に対して $\alpha + 1 \approx \beta + 1$ ならば $\alpha \approx \beta$ である.

Proof. $\alpha + 1$ から $\beta + 1$ への全単射を f とする．このとき，一般性を失うことなく $f(\alpha) = \beta$ と仮定できる．そうでない場合，$f(\gamma) = \beta$ となる $\gamma < \alpha$ が存在するから，$f(\alpha)$ の値と $f(\gamma)$ の値を交換して再び f とおきなおせばよい．すると，$f \restriction \alpha$ は α から β への全単射を与える. □

Lemma 2.1.7. $n \in \omega$ で，α は順序数であるとする．このとき $n \approx \alpha \to n = \alpha$.

Proof. n についての帰納法で示す．$n = 0$ のときは明らか．$n \in \omega$ に対して帰納法の仮定が成り立つと仮定し，$n + 1$ の場合を考える．$n + 1 \approx \alpha$ とおく．$\alpha \geq \omega$ とする．このとき $\alpha \approx \alpha + 1$ であることは容易に示せて（$\alpha + 1$ において，α を最小元にもってくるような整列順序を入れるとその順序型は α となる），先の補題より $n \approx \alpha$．帰納法の仮定より $n = \alpha \geq \omega$ となるので矛盾．よって $\alpha < \omega$ である．$\alpha = \beta + 1$ とおくと，また先の補題より $n \approx \beta$ であり，帰納法の仮定より $n = \beta$．ゆえに $n + 1 = \beta + 1 = \alpha$. □

この補題からただちに次が従う.

Corollary 2.1.8. 自然数と ω は基数である.

Definition 2.1.9. A を整列可能集合とする．

(1) $|A| < \omega$ のとき A は**有限（finite）**であるという．一方，$|A| \geq \omega$ のとき A は**無限（infinite）**であるという．
(2) $|A| \leq \omega$ のとき A は**可算（countable）**であるという．一方，$|A| > \omega$ のとき A は**非可算（uncountable）**であるという．

Definition 2.1.10. ω 未満の基数を有限基数という．有限基数でない基数を無限基数という．

有限基数と自然数は同じものを指している．また，次が成り立つ．

Lemma 2.1.11. 無限基数は極限順序数である．

Proof. κ を無限基数とし，$\kappa = \alpha + 1$ と仮定する．このとき $\omega \leq \alpha < \kappa$ である．$\alpha + 1 \approx \alpha$ より

$$\kappa = |\kappa| = |\alpha + 1| = |\alpha|$$

であるから，κ が基数であることに矛盾する．よって κ は極限順序数である．　□

Lemma 2.1.12. 任意の順序数 α に対し，$\kappa > \alpha$ となる基数 κ が存在する．

Proof. α が有限基数なら $\kappa = \omega$ とすればよい．$\alpha \geq \omega$ とする．

$$W = \{R \in \mathcal{P}(\alpha \times \alpha) \mid R \text{ は}\alpha\text{上の整列順序 }\}$$
$$S = \{\mathrm{type}(\alpha, R) \mid R \in W\}$$

とおく．まず，任意の $\beta \in S$ に対して，$\beta \approx \alpha$ である．逆に，順序数 β は $\beta \approx \alpha$ を満たすとし，$f\colon \beta \to \alpha$ を全単射とする．このとき，α 上の整列順序 R を $\xi R \eta \iff f(\xi) < f(\eta)$ で定めることができ，$\beta = \mathrm{type}(\alpha, R)$ となるので，$\beta \in S$．ゆえに，$S = \{\beta \in \mathrm{On} \mid |\alpha| = |\beta|\}$ となり，$\sup S$ は α より大きい基数となる．　□

この補題より，基数全体もまた真のクラスである．また，ZFC-（冪集合公理）は「ω 以外の無限基数が存在しない」という命題と矛盾しないので，この証明では冪集合公理の使用は避けられない．選択公理を使ってもよいなら，任意の $\mathcal{P}(x)$ が整列可能であることから，次の定理を用いた 2.1.12 の別証明を得る．

Theorem 2.1.13 (Cantor)**.** 任意の集合 x に対して，$x \prec \mathcal{P}(x)$．

Proof. x から $\mathcal{P}(x)$ への全単射が存在すると仮定して，それを f とする．$A = \{z \in x \mid z \notin f(z)\}$ という集合を考えると任意の $z \in x$ に対して $f(z) \neq A$ であるから，f は全射でなく矛盾．x から $\mathcal{P}(x)$ への包含写像は単射であるから，結局 $x \prec \mathcal{P}(x)$．　□

さて，2.1.12 より次のような定義ができる．

Definition 2.1.14. κ を基数とする．κ より大きい基数のうち最小のものを κ^+ で表す．ある基数 λ が存在して $\kappa = \lambda^+$ となるとき，κ を**後続基数（successor cardinal）**という．0 でも後続基数でもない基数を**極限基数（limit cardinal）**という．

Definition 2.1.15. 超限帰納法を用いて，順序数 α に対し $\aleph_\alpha$ を以下のように定義する．$\aleph_\alpha$ は ω_α とも書かれる場合がある．

(1) $\aleph_0 = \omega$.
(2) $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$.
(3) α が極限順序数のとき，$\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\xi \mid \xi < \alpha\}$.

Lemma 2.1.16.

(1) 任意の $\aleph_\alpha$ は基数.
(2) 任意の順序数 α, β に対して，$\alpha < \beta \Longrightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta$.
(3) 任意の無限基数はある $\aleph_\alpha$ と一致する.
(4) α が後続順序数 $\Longleftrightarrow$ $\aleph_\alpha$ は後続基数．また，α が極限順序数 $\Longleftrightarrow$ $\aleph_\alpha$ は極限基数.

Proof.

(1) 超限帰納法による．α が極限順序数のときのみが問題である．背理法を用いるため，$\aleph_\alpha$ が基数でないとする．このとき，ある順序数 $\gamma < \aleph_\alpha$ で $\aleph_\alpha \approx \gamma$ となるものが存在する．一方で，$\gamma < \aleph_\beta$ となる $\beta < \alpha$ が存在する．このとき，$\aleph_\beta < \aleph_\alpha \approx \gamma$ であるから，Bernstein の定理より $\aleph_\beta \approx \gamma$ となり $\aleph_\beta$ が基数であるという帰納法の仮定に反する.
(2) β に関する超準帰納法により容易.
(3) 主張が成立しないとする．このとき，クラス $C = \{\aleph_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On}\}$ に属さない基数が存在するので，その中で最小のものを κ とする．(2) より C は On の真の部分クラスなので，$\kappa < \aleph_\beta$ となる最小の C の要素 $\aleph_\beta$ が存在する．$\beta = 0$ はあり得ず，β の最小性から β は極限順序数でもない．よって，β は後続順序数で $\beta = \gamma + 1$ とおけるが，$\kappa < \aleph_\gamma$ であれば β の最小性に反する．$\aleph_\gamma \leq \kappa \leq \aleph_{\gamma+1}$ ならば，κ が基数であることから，$\kappa = \aleph_\gamma$ となってしまい，いずれにせよ矛盾を生じる.
(4) 定義よりただちに従う.

□

この補題より，基数のクラスは順序数のクラスと順序同型である.

2.2 基数の演算

基数の演算を定義する．順序数の演算と区別するため，記号は異なるものを用いるが，ふつうの文献では順序数と同じ表記を使うことに注意.

Definition 2.2.1. 基数 κ, λ の和 $\kappa \oplus \lambda$，積 $\kappa \otimes \lambda$ を次のように定義する：

(1) $\kappa \oplus \lambda = |\kappa \sqcup \lambda|$.
(2) $\kappa \otimes \lambda = |\kappa \times \lambda|$.

右辺に出てくる集合には，順序数の和と積を定義したときの整列順序を入れることができるので，濃度を考えることができる．明らかに，$\kappa \oplus \lambda = |\kappa + \lambda|$，$\kappa \otimes \lambda = |\kappa \cdot \lambda|$ である．順序数の場合とは異なり，基数の和と積は可換であることが容易に示せる．また，次の補題も容易なので証明は省略する.

Lemma 2.2.2. $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ を基数とする．基数の演算と大小関係について次が成り立つ.

(1) $\kappa \leq \lambda \to \kappa \oplus \mu \leq \lambda \oplus \mu$

(2) $\kappa \leq \lambda \to \kappa \otimes \mu \leq \lambda \otimes \mu$

具体的に基数の計算をしてみる．

Lemma 2.2.3. $n, m \in \omega$ とする．このとき，$n \oplus m = n + m$，$n \otimes m = n \cdot m$.

Proof. 定義より，$n \oplus m \approx n + m$．$n + m < \omega$ であることは m に関する帰納法により簡単に示せるので，2.1.7 より $n \oplus m = n + m$．積についても同様である． □

Lemma 2.2.4. κ を無限基数とする．このとき，$\kappa \otimes \kappa = \kappa$.

Proof. 無限基数のクラスは順序数の部分クラスであるから，超限帰納法を用いることができる．まず，$|\omega \otimes \omega| = |\omega \times \omega| = \omega$ が成り立つ．また，κ 未満の無限基数について命題が成り立つと仮定する．このとき，順序数 $\alpha < \kappa$ に対して $|\alpha \times \alpha| < \kappa$．$\kappa \times \kappa$ 上の整列順序 $\lhd$ を以下で定義する：

$$\begin{aligned}\langle \alpha, \beta \rangle \lhd \langle \gamma, \delta \rangle \iff & \max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\} \\ & \lor (\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\} \land \langle \alpha, \beta \rangle \text{ は辞書式順序において } \langle \gamma, \delta \rangle \text{ に先立つ}).\end{aligned}$$

この $\lhd$ が整列順序であることは容易に確認できる．そして，どの $\langle \alpha, \beta \rangle \in \kappa \times \kappa$ に対しても，

$$|\mathrm{seg}_{\langle \kappa \times \kappa, \lhd \rangle}(\langle \alpha, \beta \rangle)| \leq |(\max\{\alpha, \beta\} + 1) \times (\max\{\alpha, \beta\} + 1)| < \kappa$$

であるから，$\mathrm{type}(\kappa \times \kappa, \lhd) \leq \kappa$．よって，$|\kappa \times \kappa| \leq \kappa$ である．一方，$|\kappa \times \kappa| \leq \kappa$ は明らかなので，$\kappa \otimes \kappa = |\kappa \times \kappa| = \kappa$ である． □

Theorem 2.2.5. κ, λ を無限基数とする．このとき，$\kappa \oplus \lambda = \kappa \otimes \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.

Proof. $\lambda \leq \kappa$ としても一般性を失わない．2.2.2, 2.2.4 を用いて，$\kappa \leq \kappa \otimes \lambda \leq \kappa \otimes \kappa = \kappa$．よって，$\kappa \oplus \lambda = \kappa$．和の場合はより容易に $\kappa \oplus \kappa = \kappa$ が示せるので，同様の議論により $\kappa \oplus \lambda = \kappa$ が言える． □

次に基数の冪を定義するが，ここからはどうしても選択公理を使わなくてはならない．

Definition 2.2.6. A, B を集合として ${}^{B}A = \{f \mid f \text{ は } B \text{ から } A \text{ への関数}\}$ と書く．

Definition 2.2.7 (AC)**.** κ, λ を基数として，$\kappa^{\lambda} = |{}^{\lambda}\kappa|$.

順序数の冪と基数の冪は本来区別されるべきである．たとえば，順序数の冪 2^{ω} は ω だが，後の補題で示されるように，基数の冪 2^{ω} は ω より大きい．以降我々は基数の冪のみを扱うとする．

次は容易に示されるので証明は省略する．

Lemma 2.2.8 (AC)**.** 任意の基数 κ, λ, μ に対して $\kappa \leq \lambda$ ならば $\kappa^{\mu} \leq \lambda^{\mu}$，$\mu^{\kappa} \leq \mu^{\lambda}$ が成り立つ．

また，基数の冪において指数法則も成り立つ．

Lemma 2.2.9 (AC)**.** 基数 κ, λ, μ に対して，$\kappa^{\lambda \oplus \mu} = \kappa^{\mu} \otimes \lambda^{\mu}, (\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda \otimes \mu}$.

Proof. A, B, C を集合として，${}^{B \sqcup C}A \approx {}^{B}A \times {}^{C}A$，${}^{B}({}^{C}A) \approx {}^{B \times C}A$ が示されることより従う． □

Lemma 2.2.10 (AC)**.** κ, λ を基数とする．$\lambda \geq \omega, 2 \leq \kappa \leq \lambda$ であれば，$\kappa^{\lambda} = 2^{\lambda} = |\mathcal{P}(\lambda)|$.

Proof. ${}^{\lambda}2 \approx \mathcal{P}(\lambda)$ は $\mathcal{P}(\lambda)$ の各要素に対して特徴関数が一意に定まることによりいえるので，$2^{\lambda} = |\mathcal{P}(\lambda)|$. そして $2^{\lambda} \leq \kappa^{\lambda} \leq \lambda^{\lambda} \leq |\mathcal{P}(\lambda \times \lambda)| = |\mathcal{P}(\lambda)|$ かつ $2^{\lambda} = |\mathcal{P}(\lambda)|$ であるから，$\kappa^{\lambda} = |\mathcal{P}(\lambda)|$ である． □

Cantor の定理 2.1.13 と上の補題より，λ を基数とすれば，$\lambda < 2^{\lambda}$ が言える．

Definition 2.2.11. 連続体仮説（Continuum Hypothesis, CH）とは，$2^{\aleph_0} = \aleph_1$ という命題を指す．また，一般連続体仮説（Generalized Continuum Hypothesis, GCH）とは，任意の順序数 α に対して $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ であるという命題を指す．

定義の直前の議論から分かるように，CH や GCH は基数の冪が考えうるなかで最小の値をとるという主張である．実は，これらの主張は ZFC と独立であることが知られている．

2.3 共終数

Definition 2.3.1. α, β を順序数とし，$\alpha \leq \beta$ とする．α が β の中で**共終（cofinal）**であるとは，広義単調増加関数 $f \colon \alpha \to \beta$ が存在し，f の値域 $\mathrm{ran}(f)$ が β 内で非有界である，すなわち，

$$\forall \delta \in \beta \exists \gamma \in \alpha (\delta \leq f(\gamma))$$

を満たすことである．この f は α から β への**共終写像**とよばれる．

共終写像が広義単調増加であるという条件は実は不要だが，後の証明の都合上このような条件を課しておく．

Definition 2.3.2. 順序数 α の**共終数（cofinality）**とは，α の中で共終な最小の順序数のことで，$\mathrm{cf}(\alpha)$ と書く．

大雑把にいえば，α へ収束する順序数列の長さの最小値が $\mathrm{cf}(\alpha)$ である．

Lemma 2.3.3. α, β を順序数とする．

(1) $\mathrm{cf}(\beta) \leq \beta$.
(2) β が後続順序数のとき，$\mathrm{cf}(\beta) = 1$.
(3) 極限順序数 α が β の中で共終であることと，$\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta)$ であることは同値.
(4) $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\beta)) = \mathrm{cf}(\beta)$.

Proof. (1)(2) は自明で，(4) は (3) から直ちに従うので，(3) のみを示す．$\alpha = 0$ のときは自明．$\alpha \neq 0$ とし，$f \colon \alpha \to \beta$ を共終写像とする．$\mathrm{cf}(\alpha)$ から α への共終写像と f の合成もまた共終写像なので，$\mathrm{cf}(\beta) \leq \mathrm{cf}(\alpha)$ である．また，$g \colon \mathrm{cf}(\beta) \to \beta$ を共終写像とする．そして，$h(\xi)$ を $f(\eta) \geq g(\xi)$ となるような最小の η とすることで $h \colon \mathrm{cf}(\beta) \to \alpha$ を定義する．このとき h は $\mathrm{cf}(\beta)$ から α への共終写像であり，$\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{cf}(\beta)$．ゆえに $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta)$. □

Definition 2.3.4. 極限順序数 α は，$\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$ が成り立つとき**正則（regular）**であるという．次で示すように正則順序数は基数なので，この α は**正則基数（regular cardinal）**とよばれる．正則でない基数は**特異基数（singular cardinal）**とよばれる．

Lemma 2.3.5.

(1) 正則な順序数は基数である．
(2) 順序数の共終数は正則基数である．
(3) ω は正則．
(4) (AC) 無限後続基数は正則．

Proof. (1) 一般に，$|\alpha|$ は α の中で共終なので，$\mathrm{cf}(\alpha) \leq |\alpha|$ である．よって，α が正則ならば，$\alpha = |\alpha|$．(2) は 2.3.3(4) と (1) から従う．(3) 明らか．(4)κ^+ と共終になるような $\alpha < \kappa$ が存在したとする．その共終写像を $f\colon \alpha \to \kappa^+$ とすれば，$\kappa^+ = \sup \mathrm{ran}(f) = \bigcup\{f(\xi) \mid \xi \in \alpha\}$ である．だが，濃度 κ 以下の集合たちの高々 κ 個の和集合は，高々 $|\kappa \times \kappa| = \kappa$ の濃度しか持たない．（ここで本質的に選択公理を用いている．）これは κ^+ が基数であることに矛盾する． □

ZF と $\mathrm{cf}(\omega_1) = \omega$ は矛盾しないという結果が知られているので，この補題の (4) には，必ず選択公理が必要である．選択公理のもとで後続基数は必ず正則だが，極限基数は正則とは限らない．実際，次が言える．

Lemma 2.3.6. α が極限順序数であれば $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$．

Proof. $f\colon \alpha \to \aleph_\alpha$ を $f(\xi) = \aleph_\xi$ で定義すれば，f は共終写像となり，2.3.3(3) より主張が従う． □

Definition 2.3.7. (1) 正則な極限基数のことを**弱到達不能基数（weakly inaccessible cardinal）**という．
(2) (AC)κ が**強到達不能基数（(strongly) inaccessible cardinal）**であるとは，κ は正則基数であり，かつ任意の基数 $\lambda < \kappa$ に対して $2^\lambda < \kappa$ が成り立つこと．

Theorem 2.3.8. $\aleph_\alpha$ が弱到達不能基数であるための必要十分条件は，α が正則順序数であり，かつ $\aleph_\alpha = \alpha$ であることである．

Proof. $\aleph_\alpha$ を弱到達不能基数とする．2.1.16(4) より α は極限順序数．2.3.6 を用いて $\alpha \leq \aleph_\alpha = \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha$．したがって $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha, \aleph_\alpha = \alpha$．逆に，$\alpha$ を正則順序数かつ $\aleph_\alpha = \alpha$ とすれば，$\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha) = \alpha = \aleph_\alpha$． □

Theorem 2.3.9. 強到達不能基数は弱到達不能基数でもある．また，GCH のもとで両者は一致する．

Proof. 強到達不能基数が κ^+ と書けたとすると，$\kappa < 2^\kappa$ より $\kappa^+ \leq 2^\kappa$ となって，明らかに条件を満たさない．よって強到達不能基数は極限基数であり，弱到達不能基数でもある．また，弱到達不能基数を $\aleph_\alpha$ とおくと，2.1.16(4) より α は極限順序数である．GCH のもとでは $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$ であるから，$\aleph_\alpha$ は強到達不能基数の条件を満たす． □

実は弱到達不能基数の存在も強到達不能基数の存在も ZFC から示すことができない．これらはいわゆる巨大基数とよばれる基数である．

参考文献

[1] 田中一之・鈴木登志雄 (2003) 『数学のロジックと集合論』 培風館.
[2] 田中尚夫 (1982) 『公理的集合論』 培風館.
[3] 松坂和夫 (1968) 『集合・位相入門』 岩波書店.
[4] ケネス・キューネン (2008) 『集合論 独立性証明への案内』 藤田博司訳，日本評論社.